

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова
(филиал) федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего профессионального образования Национальный иссле-
довательский технологический университет «МИСиС»
(СТИ НИТУ «МИСиС»)

кафедра высшей математики и информатики

Э.Э. Долгополова, Т.В. Тамбыя

Теория вероятностей и математическая статистика

Учебное пособие

Одобрено редакционно-издательским советом СТИ НИТУ МИСиС
для студентов технических направлений дневной формы обучения

СТАРЫЙ ОСКОЛ 2017

ББК 22.171

УДК 531

Рецензент: кандидат техн. наук, доцент Кабулова Е.Г.

Долгополова Э.Э., Тамбыя Т.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. – Ст. Оскол: СТИ НИТУ МИСИС, 2017. - 70 с.

Учебное пособие включает в себя обширный теоретический материал по всем разделам классической теории вероятностей и основам современной математической статистики. Содержит домашние задания по теории вероятностей, а также лабораторные работы по математической статистике. В пособие включены методические указания к выполнению домашних заданий и лабораторных работ.

В приложениях приведены необходимые статистические таблицы, используемые при решении задач и выполнении лабораторных работ.

Предназначено для подготовки к зачёту и экзамену по данным разделам математики.

СОДЕРЖАНИЕ

Элементы теории вероятностей

1. Основные понятия теории вероятностей.....	4
2. Основные формулы комбинаторики.....	5
3. Теоремы теории вероятностей	6
4. Повторные независимые испытания.....	8
5. Случайные величины и их числовые характеристики.....	10
6. Некоторые виды распределений.....	14
Лабораторно-практическое занятие №1.....	16
Лабораторно-практическое занятие №2.....	17
Лабораторно-практическое занятие №3.....	18
Лабораторно-практическое занятие №4.....	19
Домашнее задание №1.....	21
Домашнее задание №2.....	22
Данные к домашнему заданию	23
Указания к выполнению домашних заданий.....	26

Элементы математической статистики

7. Генеральная совокупность и выборка.....	33
8. Группировка и представление экспериментальных результатов.....	33
9. Статистики и точечная оценка.....	35
10. Понятие доверительного интервала	37
11. Распределения, связанные с нормальным.....	37
12. Построение доверительного интервала	39
13. Понятие о статистической гипотезе.....	40
14. Линейная корреляция и регрессионный анализ.....	43
Лабораторно-практическое занятие №5.....	46
Лабораторно-практическое занятие №6.....	47
Лабораторно-практическое занятие №7.....	48
Указания к выполнению лабораторных работ.....	49
Данные к лабораторно-практическому занятию №5,6	54
Данные к лабораторно-практическому занятию №7.....	58
Приложения.....	63
Список литературы.....	70

Основы теории вероятностей

1. Основные понятия теории вероятностей

Предметом изучения теории вероятностей являются количественные закономерности однородных случайных явлений массового характера.

Событием называется всякий возможный факт, о котором можно сказать, что он произойдет или не произойдет в данных условиях.

Различают три вида событий: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют то событие Ω , которое при соблюдении некоторых условий не может не произойти, т.е. обязательно произойдет.

Невозможным называют то событие \emptyset , которое при соблюдении некоторых условий не может произойти.

Случайным называют событие, которое в одних и тех же условиях может произойти, но может и не произойти.

Испытание - совокупность тех условий или действий, которые могут быть повторены бесконечное число раз.

Два события A и B называются *несовместными*, если при данном испытании они не могут произойти одновременно.

Два события A и B называются *совместными* (совместимыми) при данном испытании, если появление одного из них не исключает возможность появления другого события при том же испытании.

События A_i называются *равновозможными* в данном испытании, если в силу симметрии опыта есть основание считать, что ни одно из этих событий не является более возможным по сравнению с другими.

Случаи называются *благоприятствующими* (благоприятными) некоторому событию, если появление одного из этих случаев влечет появление данного события. Случаи, исключающие появление события, называются *неблагоприятствующими* этому событию.

Суммой событий A и B называется событие $A+B$, состоящее в появлении или события A , или события B , или обоих этих событий вместе.

Произведением событий A и B называется событие $A \cdot B$, заключающееся в одновременном появлении и события A и события B .

Два единственно возможных и несовместных события называют *противоположными* друг другу. Если одно из этих событий обозначено A , то противоположное ему событие обозначают символом \bar{A} .

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих наступлению этого события, к числу n всех возможных случаев, т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Основные свойства вероятности

1⁰ Вероятность любого события A не может быть отрицательным числом, т.е. $P(A) \geq 0$

2⁰ Вероятность достоверного события Ω равна 1. $P(\Omega) = 1$.

3⁰ Вероятность невозможного события \emptyset равна 0. $P(\emptyset) = 0$.

4⁰ Вероятность любого случайного события A заключена между нулем и единицей $0 < P(A) < 1$.

2. Основные формулы комбинаторики

Различные группы по m предметов, составленные из n однородных предметов (m, n), называются *соединениями*. Предметы, из которых составляют различные соединения, называют элементами.

Существует 3 вида соединений: размещения, перестановки, сочетания.

Размещениями по m элементов из данных n элементов ($m \leq n$) называют такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо их порядком.

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Перестановками из n элементов называют такие соединения, которые отличаются друг от друга только порядком элементов. Число таких соединений можно найти по формуле $P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

По определению $0! = 1$.

Сочетаниями из n элементов по m называются также соединения, которые отличаются друг от друга, по меньшей мере, одним элементом и каждое из которых содержит m различных элементов:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

3. Теоремы теории вероятностей

Теорема 1. Вероятность наступления одного какого-либо события из двух несовместимых событий A и B равно сумме вероятностей этих событий $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Следствие. Для несовместных событий справедливо равенство: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Теорема 2. Вероятность наступления одного из двух событий A или B равно сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность одного из них не зависит от наступления или ненаступления другого. Два события A и B называются *зависимыми*, если вероятность одного из них зависит от наступления или ненаступления другого.

Вероятность события B , вычисленная в предположении, что перед этим наступило связанное с ним событие A , называется *условной вероятностью* события B и обозначается $P_A(B)$.

Теорема 3. Вероятность совместного наступления двух независимых событий (A и B) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло, т.е. $P(AB)=P(A) \cdot P_A(B)=P(B) \cdot P_B(A)$.

Теорема 4. Вероятность совместного наступления нескольких независимых событий равно произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных событий, вычисленные в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$$

Теорема 5. Вероятность совместного наступления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$.

Теорема 6. Вероятность совместного наступления нескольких независимых событий A_1, A_2, \dots, A_n равна произведению их вероятностей, т.е.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Следствие. Вероятность наступления хотя бы одного из n независимых событий A_1, A_2, \dots, A_n можно найти используя противоположное событие:

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) &= 1 - \overline{P(A_1 + A_2 + \dots + A_n)} = \\ &= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n). \end{aligned}$$

Формула полной вероятности

Если при некотором испытании может произойти одно какое-либо событие из нескольких несовместных A_1, A_2, \dots, A_k , и при этом никаких других событий быть не может, но одно из указанных событий обязательно произойдет, то группу событий A_1, A_2, \dots, A_k называют *полной группой событий*.

Теорема 7. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$\sum_{i=1}^k P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1.$$

Теорема 8. Если случайные события A_1, A_2, \dots, A_n образуют полную группу, и если событие B может осуществляться только совместно с каким-нибудь одним из этих событий, то вероятность наступления события B можно определить по *формуле полной вероятности*:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B).$$

Следствие. *Формула Байеса* позволяет вычислить вероятность события A_i при условии, что событие B уже произошло в результате эксперимента:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)}$$

4. Повторные независимые испытания.

Формула Бернулли

Теорема 9. Пусть производится n независимых повторных испытаний по отношению к некоторому событию A . Пусть вероятность появления этого события в каждом отдельном испытании остается неизменно равной p , а вероятность появления противоположного события \bar{A} , есть q .

Тогда вероятность появления интересующего нас события A ровно k раз при указанных n испытаниях рассчитывается по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Замечание 1. Формулу Бернулли целесообразно использовать при небольшом числе независимых испытаний, при условии, что вероятность p не мала.

Замечание 2. Наивероятнейшее число появления события A можно найти из неравенства:

$$np - q \leq k_{p_{\max}} < np + p$$

Асимптотическая формула Пуассона

В статистической практике нередко встречаются такие примеры независимых испытаний, когда при большом числе n независимых испытаний вероятность p появления события в каждом отдельном испытании оказывается сравнительно малой величиной, стремящейся к нулю с увеличением числа испытаний.

При этих условиях для вычисления вероятности $P_n(k)$ появление события k раз в n испытаниях пользуются *асимптотической формулой Пуассона*:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Предельные теоремы Муавра-Лапласа

Если число независимых испытаний n достаточно велико, а вероятность p одного успешного испытания не мала, то пользоваться формулой Бернулли становится неудобно. В этом случае для решения практических задач используются следующие теоремы Лапласа:

Локальная теорема $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция плотности стандартного

нормального распределения, значения которой для неотрицательного аргумента табулированы, причём $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Интегральная теорема

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция стандартного нормального распределения, значения которой для неотрицательного аргумента также табулированы. Для отрицательного аргумента их можно найти из соотношения $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$.

Замечание. Теоремами Муавра-Лапласа целесообразно пользоваться при условии, что $npq \geq 9$.

5. Случайные величины и их числовые характеристики

Случайной величиной называется переменная величина, имеющая определённый экономический, физический или иной смысл, значения которой подвержены неконтролируемому разбросу. Случайные величины могут быть как дискретными, так и непрерывными.

Дискретной называется случайная величина, которая может принимать лишь отдельные, изолированные друг от друга значения. Дискретная случайная величина – это величина, все значения которой можно перенумеровать.

Законом распределения дискретной случайной величины X является ряд распределения - таблица из двух строк (столбцов), в первой из которых перечислены все возможные значения случайной величины $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ во второй – соответствующие им вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$:

x_i	x_1	x_2	x_n
P_i	p_1	p_2	p_n

Вероятности всех значений случайной дискретной величины удовлетворяют условию нормировки:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Графическое представление закона распределения случайной дискретной величины называется *многоугольником распределения*.

На практике необходимо знать некоторое среднее из значений величины, вокруг которого группируются (более или менее тесно) эти значения.

Это среднее носит название *математического ожидания* случайной величины X , обозначается $M(X)$ и вычисляется по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

Свойства математического ожидания

1⁰ Математическое ожидание постоянной (неслучайной) величины C равно самой постоянной $M(C)=C$.

2⁰ Константу можно вынести за знак математического ожидания $M(CX)=CM(X)$.

3⁰ Математическое ожидание алгебраической суммы нескольких случайных величин равно алгебраической сумме математических ожиданий слагаемых

$$M(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n) = M(X_1) \pm M(X_2) \pm \dots \pm M(X_n).$$

4⁰ Математическое ожидание произведения нескольких независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(X_1 X_2 \dots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \dots M(X_n).$$

Дисперсией случайной дискретной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 \cdot p_i, \text{ где } M(X) = m_x.$$

Для вычисления дисперсии более удобна формула: $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$, т.е. дисперсия случайной величины

равна разности между математическим ожиданием квадрата этой величины и квадратом ее математического ожидания.

Свойства дисперсии

1⁰ Дисперсия постоянной величины равна нулю

$$D(C) = 0.$$

2⁰ Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2D(X).$$

3⁰ Дисперсия суммы нескольких независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X_1 + \dots + X_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n).$$

Поскольку дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, на практике часто используют другую числовую характеристику - *среднеквадратичное отклонение* (СКО).

Среднеквадратичным отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma_x = \sqrt{D(x)}$.

Непрерывная случайная величина – это величина, все значения которой сплошь заполняют некоторый промежуток числовой прямой.

Закон распределения непрерывной случайной величины может быть задан с помощью любой из двух взаимно-однозначно связанных между собой функций: *функции распределения (интегральной)* и *плотности распределения (дифференциальной)*.

Функция распределения одномерной случайной величины определяется следующим образом: $F(x) = P(X < x)$.

Плотность распределения вероятностей представляет собой производную функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Свойства функции распределения $F(x)$

1⁰ Значения интегральной функции распределения принадлежат отрезку $[0, 1]$, т.е. $0 \leq F(x) \leq 1$.

2⁰ Функция распределения есть неубывающая функция.

3⁰ $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

4⁰ $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$.

Свойства функции плотности распределения $f(x)$

1⁰ Дифференциальная функция распределения есть функция неотрицательная $f(x) \geq 0$.

2⁰ Условие нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

3⁰ Зная дифференциальную функцию, можно найти интегральную функцию распределения: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

4⁰ $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется интеграл:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

где $f(x)$ - плотность распределения вероятностей случайной величины X .

Дисперсия непрерывной случайной величины равна:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - m_x^2.$$

Медианой $Me(X)$ распределения случайной величины X называется корень уравнения $F_x(Me) = \frac{1}{2}$.

Медиана является средней характеристикой распределения в том смысле, что X с равными вероятностями принимает значе-

ния, лежащие справа и слева от $Me(X)$. Поэтому для дискретной случайной величины медиана – это середина ряда распределения.

Модой $Mo(X)$ распределения называется наиболее вероятное значение случайной величины: в непрерывном случае – точка максимума плотности распределения, в дискретном случае – наиболее вероятное значение из ряда распределения.

6. Некоторые виды непрерывных распределений

Равномерное распределение

Случайная величина называется *равномерно распределённой* на отрезке $[a, b]$, если её плотность распределения на отрезке постоянна, а вне его равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

Числовые характеристики этого распределения:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Экспоненциальное распределение

Случайная величина X распределена по экспоненциальному закону, если её плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ где } \lambda > 0.$$

Числовые характеристики этого распределения:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормальное распределение

Непрерывная случайная величина X называется *нормальной*, если её плотность распределения вероятностей описывается формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где μ - математическое ожидание, σ - среднеквадратическое отклонение.

Функция распределения нормально распределенной случайной величины записывается с помощью интеграла, который не выражается через элементарные функции:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Нормальное распределение с параметрами $\mu=0$, $\sigma=1$ называется нормированным или *стандартным*.

Плотность вероятности и функция *стандартного* нормального распределения описывается следующими формулами:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Значения функций $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ для неотрицательных значений табулированы, причём $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Связь между стандартным и произвольным нормальным распределением осуществляется с помощью замены:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Теорема. Если случайная величина X распределена по нормальному закону $N(\mu, \sigma)$, то вероятность её попадания в интервал $[a; b]$ определяется следующим образом:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Лабораторно-практическое занятие №1

Формулы комбинаторики

1. Сколько трехзначных и пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра используется а) не более одного раза, б) более одного раза?
2. В студсовет избрано 8 человек. Сколькими способами можно из них выбрать председателя и секретаря?
3. Сколько можно составить различных букетов по 11 цветов, если выбирать из цветов 7 сортов, а если из 12-ти сортов?
4. Сколькими способами можно рассадить 8 человек на 8 мест? А на 10 мест, причём Петя и Света, находящиеся среди этих студентов, хотя и сестры вместе?

Классическая формула вероятности

5. Игральная кость подбрасывается два раза. Найти вероятности следующих событий:
А – числа очков на обеих костях совпадают;
В – число очков на второй кости больше, чем на первой;
С – сумма очков равна 7, а разность 3;
D – хотя бы на одной кости выпадет цифра 3.
6. На полке лежат 15 учебников, из них 8 – по математике. Студент наудачу берет 6 учебников. Найти вероятность того, что среди них 2 учебника по математике.
7. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов возможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки одного парохода 2 часа, а другого – 4 часа.
8. Из отрезка $[-2; 4]$ наудачу взяты 2 числа. Найти вероятность того, что их сумма больше двойки, а произведение меньше четырех.

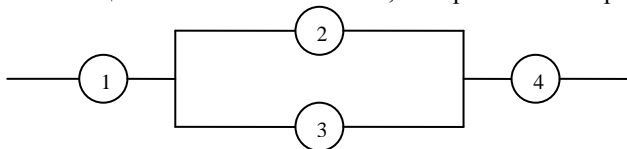
Формулы сложения и умножения

9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели первым орудием, если для второго она равна 0,8.
10. Вероятности сдать три экзамена сессии на «5» для студента И. соответственно равны 0,5, 0,7, 0,8. Найти вероятности того, что студент сдаст на «5»: а) все три экзамена; б) два экзамена; в) хотя бы один.

Лабораторно-практическое занятие №2

Формулы сложения и умножения

1. Электрическая цепь составлена по схеме, изображенной на рисунке:



Различные элементы цепи работают независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы элементов следующая: для первого – 0,6, для второго – 0,8, для третьего – 0,7, для четвертого – 0,9. Определить вероятность безотказной работы всей системы.

2. Вероятность того, что проходящая мимо бензоколонки машина подъедет заправляться, равна 0,3. Сколько должно проехать машин, чтобы с вероятностью не менее чем 0,95 хотя бы одна из них подъехала заправляться?

Условная вероятность, независимость событий

3. В игорном клубе половина игроков честные, половина – шулеры. Вероятность вытащить из колоды короля равна $1/8$. Для шулера эта вероятность равна 1. Сидящий перед вами игрок вытаскивает из колоды короля с первого раза. С какой вероятностью перед вами шулер?
4. Вероятность перехода студента первого курса на второй равна 0,9, а вероятность успешного окончания университета равна 0,8. Какова вероятность того, что студент второго курса окончит университет?

Формулы полной вероятности и Байеса

5. Вероятности того, что во время работы компьютера возникнет сбой в процессоре, оперативной памяти и в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения этих сбоев соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший сбой будет обнаружен.
6. Имеется три одинаковые урны. В первой урне 4 белых и 6 черных шара, во второй – 7 белых и 3 черных, в третьей – только черные. Наудачу выбирается урна, и из нее вынимают один шар. Он оказался черным. Какова вероятность, что он вынут из первой урны?
7. Группа из 20 человек сдает экзамен по теории вероятностей. Всего 30 билетов, из которых все билеты знают 10 студентов, 6 выучили 15 билетов, а четверо – только 10 билетов. Знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью – 0,9, а незнание – с вероятностью равной 0,1. Наудачу вызванный студент сдал экзамен. Найти вероятность, что он выучил 15 билетов.

Лабораторно-практическое занятие №3

Повторные независимые испытания

1. Для стрелка, выполняющего упражнение в тире, вероятность попасть в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов предшествующих выстрелов и равна 0,6. Спортсмен сделал 5 выстрелов. Найти вероятности событий: А – ровно 1 попадание; В – ровно 2 попадания; С – хотя бы одно попадание; Д – не менее 3-х попаданий. Найти наиболее вероятное число попаданий и его вероятность.
2. На АТС в час в среднем поступает 360 вызовов. Найти вероятность того, что за минуту поступит не более 2-х вызовов.
3. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет от 790 до 830.
4. Известно, что 3% радиоламп, изготавливаемых заводом, являются нестандартными. Из большой партии производится выборка радиоламп. Сколько нужно взять радиоламп, чтобы с вероятностью не менее 0,85 была извлечена хотя бы одна нестандартная лампа?
5. В результате постоянных наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя в данной местности 1 июля равна 0,12. Каково наиболее вероятное число дождливых дней 1 июля для данной местности за 100 ближайших лет? Найти вероятность этого события.
6. Средняя плотность болезнетворных микробов в 1 куб. метре воздуха равна 100. Берется на пробу 2 куб. дм воздуха. Найти вероятность, что в нем будет обнаружен хотя бы один микроб.
7. Завод отправил в торговую сеть 400 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено: а) ровно три изделия; б) более трех изделий.
8. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 10 пакетов акций в результате торгов по первоначальной цене не будут проданы 5 пакетов; будет продано а) менее 2-х пакетов, б) не более 2-х пакетов в) хотя бы 2 пакета, г) наивероятнейшее число пакетов.
9. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник марки «А», равна 0,3. Найти вероятность того, что холодильник потребуется:
 - а) не менее чем двум покупателям;
 - б) не более чем трем покупателям;
 - в) всем четырем покупателям.

Лабораторно-практическое занятие №4

Случайные величины

1. Закон распределения случайной величины X задан таблицей:

	0	1	3	4
i				
	0,1	0,2	0,3	?
i				

Найти недостающее значение вероятности, m_x , D_x . Чему равна вероятность $P(X > 1)$, $P(X \leq 2)$? Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = 3X - 2$, $Z = -X + 2Y$. Вычислить моду, асимметрию и эксцесс случайной величины X .

2. Составить таблицу распределения случайной величины $Z = X + Y$, если X и Y – независимые случайные величины, заданные таблицами:

	4	6
i		
	0,6	0,4
i		

	0	2
i		
	0,3	0,7
i		

Чему равно математическое ожидание и дисперсия случайной величины $V = 2X - 5Y$?

3. Случайная величина X распределена по закону с плотностью распределения вероятностей вида

$$f(x) = \begin{cases} C \cos x, & \text{если } |x| \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{если } |x| > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти C , функцию распределения и построить ее график. Вычислить $P(|X| \leq \pi/6)$, m_x , D_x , Mo , Me .

4. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(4x - x^2), & \text{если } 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При каком значении λ функция $f(x)$ может быть принята за плотность вероятности случайной величины X ? Найти функцию распределения, нарисовать ее график. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение σ , моду, медиану и вероятность попадания случайной величины на интервал длины σ , симметричный относительно мат. ожидания.

Равномерное распределение

5. Случайная величина X имеет равномерное распределение вероятностей на интервале $(4, 10)$. Найти плотность распределения вероятностей, функцию распределения, вычислить математическое ожидание, дисперсию и средне-квадратическое отклонение.
6. Шкала рычажных весов, установленных в лаборатории, имеет цену деления 1 г. При измерении массы химических компонентов смеси отсчет делается с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону. Считая, что случайная величина X – абсолютная ошибка определения массы – распределена равномерно, составить функцию распределения и плотности вероятностей, построить их графики. Вычислить мат. ожидание и дисперсию. Какова вероятность того, что случайная величина не превысит σ ?

Показательное распределение

7. Найти функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и СКО для случайной величины, распределённой по показательному закону с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 10e^{-10x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

8. Найти функцию плотности, математическое ожидание, дисперсию и СКО для случайной величины, распределённой по показательному закону, заданному функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-0,08x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Нормальное распределение

9. Случайная величина X – размер диаметра детали – распределена нормально. Среднее значение диаметра 20 мм, дисперсия – $0,36 \text{ мм}^2$.

Найти:

- а) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали имеет размеры от 19 до 22 мм;
 - б) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали отличается от среднего не более чем на 1 мм в ту или другую сторону;
 - в) границы, в которые попадает диаметр детали с вероятностью 0,9876.
10. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 520 г. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 0,5 кг. Каков процент коробок, масса которых
- а) менее 470 г,
 - б) от 500 до 550 г,
 - в) более 550 г,
 - г) отличается от средней не более чем на 30 г в ту или иную сторону?

Домашнее задание №1

1. Необходимо выбрать студенческий совет, состоящий из R человек. Среди кандидатов N первокурсников, M второкурсников и K третьекурсников. Найти вероятности следующих событий:
 - а) в студсовет попадет n первокурсников, m второкурсников и k третьекурсников;
 - б) хотя бы один первокурсник попадет в студсовет.
2. Три стрелка стреляют по мишени. Предполагается, что события попадания в мишень для стрелков независимы и вероятности попадания стрелков в мишень равны p_1, p_2, p_3 . Какова вероятность того, что:
 - а) все три выстрела окажутся успешными;
 - б) хотя бы один из трёх выстрелов окажется успешным;
 - в) точно один выстрел окажется успешным, два неуспешными?
3. Имеется три одинаковые коробки с коллекционными монетами. В первой коробке m_1 российских и m_2 канадских монет, во второй – n_1 российских и n_2 канадских, в третьей – r_1 российских и r_2 канадских. Наудачу выбирается коробка, и из нее вынимают две монеты.
 - а) Найти вероятность, что они разные (российские и канадские).
 - б) Они оказались разными. Из какой коробки вероятнее всего они были извлечены?
4. Вероятность того, что некий студент может сдать экзамен сессии на отлично равна p . В сессию он должен сдать N экзаменов. Найти вероятности того, что студент сдаст на отлично:
 - а) n экзаменов;
 - б) от n_1 до n_2 экзамена;
 - в) хотя бы один экзамен;
 - г) найти наиболее вероятное число экзаменов, сданных на отлично, и его вероятность.
5. Вероятность изготовления бракованной детали равна p . Определить вероятность того, что из N деталей число бракованных составит:
 - а) n деталей;
 - б) хотя бы две.
6. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна p . Сколько нужно купить лотерейных билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью, не меньшей, чем 0,95?

Домашнее задание №2

7. Страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая в среднем по l договоров из ста. Пусть X – число таких договоров среди наудачу отобранных n . Требуется:
- составить ряд распределения X ;
 - вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, моду;
 - вычислить вероятность того, что число договоров, по которым будет произведена выплата, не менее m .
8. Плотность распределения случайной величины X на промежутке $[z_1, z_2]$ имеет вид $f(x) = A \cdot |x - z_3|$, для $x \in [z_1, z_2]$ $f(x) = 0$. Требуется:
- найти значение A ;
 - указать плотность распределения, функцию распределения $F(x)$ и построить их графики;
 - вычислить математическое ожидание m_x , дисперсию D_x , моду, медиану, среднеквадратическое отклонение σ_x ;
 - найти вероятность $P(|x - m_x| < \sigma_x)$.
9. Измерительный прибор работает без систематических ошибок (работа измерительного прибора без систематических ошибок означает, что $m_x = 0$). Известно, что вероятность ошибки измерения, превышающей по абсолютной величине Δ , равна p . Пусть случайная величина X — это величина ошибки измерения. Предполагая, что случайная величина X нормально распределена, найти:
- приближенное значение дисперсии;
 - вероятность того, что ошибка измерения не превысит ε ;
 - Вероятность того, что ошибка измерения изменяется от α до β ;

Данные к домашнему заданию по вариантам:

№	Задача 1							Задача 2		
	<i>R</i>	<i>N</i>	<i>M</i>	<i>K</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>k</i>	<i>p</i> ₁	<i>p</i> ₂	<i>p</i> ₃
1	10	5	6	5	3	3	4	0,2	0,4	0,7
2	9	4	7	6	2	5	2	0,3	0,5	0,8
3	8	6	7	4	3	4	1	0,5	0,6	0,9
4	10	8	6	5	5	3	2	0,3	0,7	0,2
5	9	6	7	5	4	4	1	0,7	0,4	0,5
6	8	7	5	5	3	3	2	0,8	0,3	0,7
7	10	5	8	6	2	5	3	0,6	0,2	0,5
8	9	7	8	3	4	3	2	0,1	0,9	0,4
9	8	5	5	5	3	2	3	0,2	0,5	0,6
10	10	7	7	8	4	4	2	0,4	0,6	0,8
11	9	7	8	5	6	2	1	0,6	0,7	0,5
12	8	5	5	7	4	3	1	0,9	0,5	0,3
13	10	4	8	4	1	7	2	0,7	0,5	0,1
14	9	8	7	3	4	3	2	0,5	0,8	0,4
15	8	5	5	6	2	2	4	0,3	0,8	0,2
16	10	7	7	5	5	1	4	0,2	0,9	0,8
17	9	3	7	8	1	6	2	0,7	0,6	0,5
18	8	7	7	7	3	1	4	0,8	0,4	0,7
19	10	5	6	4	2	5	3	0,6	0,9	0,3
20	9	6	4	6	3	3	3	0,5	0,7	0,8
21	8	4	4	7	4	2	2	0,4	0,5	0,8
22	10	5	6	5	3	3	4	0,7	0,3	0,4
23	9	7	5	3	4	2	3	0,6	0,5	0,5
24	8	5	5	6	3	2	3	0,8	0,3	0,5
25	10	3	6	5	2	4	4	0,5	0,6	0,9

№	Задача 3			Задача 4			Задача 5		Зад.6
	m_1 m_2	n_1 n_2	r_1 r_2	p	N n	n_1 n_2	p	N n	
1	4	5	3	0,63	5	2	0,002	1000	0,02
	3	2	5		3	4		2	
2	5	4	3	0,57	4	1	0,001	500	0,01
	3	2	3		3	3		3	
3	6	3	4	0,46	4	2	0,003	300	0,03
	3	2	1		2	3		5	
4	2	6	2	0,55	5	2	0,004	500	0,04
	7	4	2		2	4		4	
5	4	3	4	0,67	6	3	0,001	1000	0,01
	1	7	3		4	5		3	
6	8	6	5	0,46	4	3	0,003	200	0,03
	3	4	4		2	4		2	
7	4	6	7	0,68	5	1	0,002	500	0,02
	5	2	1		4	4		4	
8	5	7	3	0,56	4	2	0,005	400	0,05
	3	4	3		3	4		3	
9	7	5	2	0,81	5	1	0,005	200	0,05
	2	3	4		2	3		1	
10	6	7	3	0,72	4	2	0,001	500	0,01
	5	3	5		1	3		2	
11	9	4	3	0,65	6	3	0,007	1000	0,07
	1	6	7		4	5		6	
12	2	6	8	0,36	5	2	0,002	1000	0,02
	5	3	4		4	4		5	
13	6	8	2	0,55	5	2	0,003	200	0,03
	2	5	2		3	5		1	
14	3	4	1	0,48	4	1	0,004	200	0,04
	7	2	3		2	3		3	
15	1	5	8	0,74	4	2	0,006	500	0,06
	5	3	3		3	4		4	
16	7	5	9	0,68	6	3	0,002	300	0,02
	2	6	3		3	6		4	
17	2	5	7	0,72	5	2	0,003	1000	0,03
	6	3	6		3	4		7	
18	2	4	7	0,84	4	1	0,001	300	0,01
	4	3	1		2	3		1	
19	3	5	8	0,91	4	1	0,008	500	0,08
	3	4	4		3	4		10	
20	5	4	6	0,73	5	2	0,005	200	0,05
	4	4	7		2	4		5	
21	2	3	2	0,55	5	1	0,002	400	0,04
	5	4	2		3	3		3	

22	3 6	5 7	3 2	0,48	4 1	1 2	0,003	600 5	0,03
23	3 7	4 6	5 5	0,66	5 2	1 4	0,004	500 3	0,05
24	2 7	4 5	3 1	0,75	4 3	2 3	0,002	600 4	0,10
25	4 4	3 6	1 5	0,84	3 2	1 2	0,006	700 3	0,15

№	Задача 7			Задача 8			Задача 9				
	l	n	m	Z_1	Z_2	z_3	Δ	p	ϵ	α	β
1	25	5	3	0	2	-1	5	0,05	6	-2	6
2	30	6	4	-1	1	2	3	0,10	2	-4	2
3	24	6	2	0	3	-2	10	0,05	9	-7	12
4	40	5	2	-2	0	1	7	0,15	8	-3	8
5	35	4	3	-1	2	3	5	0,03	7	-6	2
6	25	5	4	0	1	2	8	0,07	9	-5	2
7	20	6	4	-2	0	1	7	0,08	4	-4	6
8	32	4	3	-3	-1	1	10	0,20	8	-8	12
9	16	5	2	1	3	0	5	0,12	7	-7	1
10	18	6	2	0	2	-2	2	0,09	4	-3	1
11	21	4	4	-2	1	2	6	0,10	5	-4	3
12	22	5	3	0	2	-2	8	0,05	6	0	9
13	24	6	2	-3	-2	1	9	0,16	7	-7	5
14	30	4	2	-1	1	1	10	0,18	8	-1	15
15	32	6	4	-1	0	2	5	0,07	6	-6	3
16	40	5	4	2	4	-1	2	0,09	3	-4	1
17	35	4	3	0	2	0	5	0,21	4	-6	3
18	25	5	3	-1	1	2	7	0,03	5	-8	0
19	36	6	4	1	3	-1	8	0,07	9	-5	2
20	23	4	3	2	3	1	9	0,12	6	-3	4
21	25	6	3	-2	-1	1	6	0,13	7	-9	8
22	18	5	2	-3	-1	1	7	0,14	5	-7	3
23	22	5	4	0	2	-3	10	0,15	9	-3	7
24	35	5	4	-2	2	4	8	0,07	7	-2	4
25	21	6	3	-1	1	3	6	0,14	7	-4	3

Указания к выполнению домашнего задания

Задача 1. Необходимо выбрать студенческий совет, состоящий из R человек. Среди кандидатов N первокурсников, M второкурсников и K третьекурсников. Найти вероятности следующих событий:

а) в студсовет попадет n первокурсников, m второкурсников и k третьекурсников;

б) хотя бы один первокурсник попадет в студсовет.

Решение. а) По формуле $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$, где $N(A)$ - число исходов, благоприятствующих событию A , $N(\Omega)$ - общее число исходов. Для вычисления этих значений используем число сочетаний:

$$N(\Omega) = C_{N+M+K}^R, \quad N(A) = C_N^n \cdot C_M^m \cdot C_K^k.$$

б) $B = \{\text{хотя бы один первокурсник попадет в студсовет}\}$.

Перейдём к событию $\bar{B} = \{\text{ни один первокурсник не попадет в студсовет}\}$.

$$P(\bar{B}) = \frac{N(\bar{B})}{N(\Omega)}, \quad \text{где } N(\Omega) = C_{N+M+K}^R, \quad N(\bar{B}) = C_{M+K}^R.$$

Искомая вероятность равна $P(B) = 1 - P(\bar{B})$.

Задача 2. Три стрелка стреляют по мишени. Предполагается, что события попадания в мишень для стрелков независимы и вероятности попадания стрелков в мишень равны p_1, p_2, p_3 . Какова вероятность того, что:

а) все три выстрела окажутся успешными;

б) хотя бы один из трёх выстрелов окажется успешным;

в) точно один выстрел окажется успешным, два неуспешными?

Решение. а) $A = \{\text{все три выстрела окажутся успешными}\}$.

Введём следующие обозначения:

$A_i = \{\text{стрелок с номером } i \text{ попадет в мишень}\}$, тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ и

$$P(A_i) = p_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

События A_i независимы, значит по теореме умножения вероятность произведения событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3.$$

б) $B = \{\text{хотя бы один из трёх стрелков попадет в мишень}\}$.

Перейдём к событию $\bar{B} = \{\text{ни один из трёх стрелков не попадёт в мишень}\}$, тогда $\bar{B} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$, где событие $\bar{A}_i = \{\text{стрелок с номером } i \text{ не попадёт в мишень}\}$ и $P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i) = 1 - p_i$. В силу независимости этих событий имеем $P(\bar{B}) = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$. Искомая вероятность равна $P(B) = 1 - P(\bar{B})$.

в) $C = \{\text{один стрелок попадёт, а два других – нет}\}$.

Это событие можно представить в виде суммы попарно трёх несовместных событий:

$$C = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3.$$

По теореме сложения для несовместных событий имеем:

$$P(C) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3).$$

В силу независимости вышеуказанных событий это равенство можно продолжить следующим образом:

$$P(C) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)$$

Подставляя исходные данные, получим искомую вероятность.

Задача 3. Имеется три одинаковые коробки с коллекционными монетами. В первой коробке m_1 российских и m_2 канадских монет, во второй – n_1 российских и n_2 канадских, в третьей – r_1 российских и r_2 канадских. Наудачу выбирается коробка, и из нее вынимают две монеты.

Решение. а) Найти вероятность, что они разные (российские и канадские).

Введём следующие обозначения:

$B = \{\text{монеты разные}\}$, $A_i = \{\text{наудачу выбрана } i \text{ коробка}\}$.

Вероятность $P(A_i) = \frac{1}{3}$, так как было 3 коробки.

Найдём условные вероятности $P_{A_i}(B)$ по классическому определению, используя число сочетаний:

$$P_{A_1}(B) = \frac{m_1 \cdot m_2}{C_{m_1+m_2}^2}, \quad P_{A_2}(B) = \frac{n_1 \cdot n_2}{C_{n_1+n_2}^2}, \quad P_{A_3}(B) = \frac{r_1 \cdot r_2}{C_{r_1+r_2}^2}.$$

Искомая вероятность по формуле полной вероятности равна $P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + P(A_3) \cdot P_{A_3}(B)$.

б) Они оказались разными. Из какой коробки вероятнее всего они были извлечены?

На вопрос задачи можно ответить, вычислив три вероятности по формуле Байеса $P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{P(B)}$, и выбрать наибольшую из них.

Задача 4. Вероятность того, что некий студент может сдать экзамен сессии на отлично равна p . В сессию он должен сдать N экзаменов. Найти вероятности того, что студент сдаст на отлично:

Решение. а) $A = \{n \text{ экзаменов сдано на отлично}\}$.

По формуле Бернулли имеем: $P(A) = P_N(n) = C_N^n \cdot p^n \cdot q^{N-n}$, где $p + q = 1$.

б) $B = \{\text{от } n_1 \text{ до } n_2 \text{ экзамена}\}$.

Событие B представляет собой сумму несовместных событий B_i , где $i = n_1, \dots, n_2$, следовательно,

$$P(B) = \sum_{i=n_1}^{n_2} P(B_i) = P_N(n_1) + \dots + P_N(n_2) = C_N^{n_1} p^{n_1} q^{N-n_1} + \dots + C_N^{n_2} p^{n_2} q^{N-n_2}$$

в) $C = \{\text{хотя бы один экзамен сдан на отлично}\}$.

Введём обозначение $\bar{C} = \{\text{ни одного экзамена студент на отлично не сдал}\}$, тогда $P(\bar{C}) = P_N(0) = C_N^0 \cdot p^0 \cdot q^N = q^N$. Искомую вероятность найдём по формуле $P(C) = 1 - P(\bar{C})$.

г) найти наиболее вероятное число экзаменов, сданных на отлично, и его вероятность.

Обозначим наиболее вероятное число n_0 , его можно найти их двойного неравенства $Np - q < n_0 \leq Np + p$ и, применив формулу Бернулли, определить $P_N(n_0)$.

Задача 5. Вероятность изготовления бракованной детали равна p . Определить вероятность того, что из N деталей число бракованных составит: а) n деталей; б) хотя бы две.

Решение. а) $A = \{\text{число бракованных составит } n \text{ деталей}\}$.

По формуле Пуассона $P(A) = P_N(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, где $\lambda = Np$.

б) $B = \{\text{хотя бы две}\}$.

Перейдём к событию $\bar{B} = \{\text{число бракованных изделий менее двух}\}$, тогда \bar{B} - это сумма двух несовместных событий, а его вероятность - это

сумма вероятностей, каждую из которых можно определить по формуле

Пуассона: $P(\bar{B}) = P_N(0) + P_N(1)$. Искомая вероятность равна

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}).$$

Задача 6. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна p . Сколько нужно купить лотерейных билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью, не меньшей, чем 0,95?

Решение. Введём следующие обозначения

$$A_i = \{i\text{-ый билет выигрышный}\}, \text{ тогда } P(A_i) = p;$$

$$\bar{A}_i = \{i\text{-ый билет невыигрышный}\}, \text{ тогда } P(\bar{A}_i) = 1 - p;$$

N – число лотерейных билетов;

$A = \{\text{хотя бы один билет выигрышный}\};$

$$\bar{A} = \{\text{ни один билет не выигрышный}\}.$$

Событие \bar{A} представляет собой произведение независимых событий \bar{A}_i , и по теореме умножения его вероятность равна $P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_N) = (1 - p)^N$.

По условию задачи должно выполняться неравенство: $P(A) \geq 0,95$, следовательно, число купленных лотерейных билетов N можно найти, решив неравенство: $1 - (1 - p)^N \geq 0,95$.

Задача 7. Страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая в среднем по l договоров из ста. Пусть X – число таких договоров среди наудачу отобранных n . Требуется:

- составить ряд распределения X ;
- вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, моду;
- вычислить вероятность того, что число договоров, по которым будет произведена выплата, не менее m .

Решение. а) Ряд распределения составим, исходя из того, что случайная величина X имеет биномиальное распределение, где $p = \frac{l}{100}$ – вероятность выплаты по одному договору. Всевозможные значения случайной величины: $0, 1, \dots, n$, а их вероятности равны:

$$p_k = P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Внесём эти значения в таблицу:

x_k				
p_k	0	1		n

б) Математическое ожидание, дисперсию и СКО вычислим по формулам $m_x = \sum_{i=0}^n x_i p_i$, $D_x = \sum_{i=0}^n x_i^2 \cdot p_i - m_x^2$, $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Мода Mo – это значение x_i с наибольшей вероятностью.

в) Пусть $A = \{\text{число договоров, по которым будет произведена выплата, не менее } m\}$, тогда $P(A) = P(X \geq m)$. Суммируем по таблице все вероятности, которые удовлетворяют данному условию.

Задача 8. Плотность распределения случайной величины X на промежутке $[z_1, z_2]$ имеет вид $f(x) = A \cdot |x - z_3|$, а при $x \notin [z_1, z_2]$ $f(x) = 0$. Требуется:

- найти значение A ;
- указать плотность распределения, функцию распределения и построить их графики;
- вычислить математическое ожидание m_x , дисперсию D_x , моду, медиану, среднее квадратическое отклонение σ_x ;
- найти вероятность $P(|x - m_x| < \sigma_x)$.

Решение. а) Значение параметра A найдём из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \text{ т.е. справедливо следующее: } \int_{z_1}^{z_2} A |x - z_3| dx = 1, \text{ таким}$$

образом плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [z_1, z_2], \\ A \cdot |x - z_3|, & z_1 \leq x \leq z_2. \end{cases}$$

б) Функцию распределения $F(x)$ найдём, используя её определение и свойство непрерывности слева:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, F(x) = \begin{cases} 0, & x < z_1 \\ \int_{z_1}^x A|t - z_3| dt, & z_1 \leq x \leq z_2, \\ 1, & x > z_3. \end{cases}$$

в) $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{z_1}^{z_2} A|x - z_3| x dx$ - математическое ожидание;

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - m_x^2 = \int_{z_1}^{z_2} A|x - z_3| x^2 dx - m_x^2$$
 - дисперсия;

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$
 - среднее квадратичное отклонение;

$Mo = \max_{[z_1, z_2]} f(x)$ - максимальное значение функции плотности распределения вероятностей;

Me - медиана - это корень уравнения $F(Me) = 0,5$.

г) Вероятность $P(|x - m_x| < \sigma_x)$ можно найти по формуле

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a), \text{ положив } a = m_x - \sigma_x \text{ и } b = m_x + \sigma_x.$$

Задача 9. Измерительный прибор работает без систематических ошибок (работа измерительного прибора без систематических ошибок означает, что $m_x = 0$). Известно, что вероятность ошибки измерения, превышающей по абсолютной величине Δ , равна p . Пусть случайная величина X — это величина ошибки измерения. Предполагая, что случайная величина X нормально распределена, найти

а) приближенное значение дисперсии;

б) вероятность того, что ошибка измерения не превысит ε ;

в) Вероятность того, что ошибка измерения изменяется от α до β ;

Решение. а) Условие $P(|x| \geq \Delta) = p$ можно сформулировать иначе:

$$P(|x| < \Delta) = 1 - p. \text{ Применяя формулу } P(|x| < \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - 1$$
 и

пользуясь таблицей значений функции стандартного нормального распреде-

ления, найдём приближённое значение среднеквадратичного отклонения σ и дисперсии $D_x = \sigma^2$.

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция стандартного нормального распре-

ления, значения которой для неотрицательного аргумента табулированы. Для отрицательного аргумента их можно найти из соотношения

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \Phi(-\infty) = 0, \Phi(+\infty) = 1.$$

б) Вероятность того, что случайная величина не превосходит значение

$$\varepsilon \text{ равна } P(x < \varepsilon) = P(-\infty < x < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty).$$

в) Вероятность того, что случайная величина изменяется от α до β равна

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right).$$

Элементы математической статистики

7. Генеральная совокупность и выборка

Совокупность всех возможных результатов наблюдений показателя при заданном комплексе условий (факторов) называется *генеральной совокупностью*. Исследователь заранее не может предсказать результаты наблюдений, поэтому они рассматриваются как возможные значения некоторой случайной величины.

Выборкой из генеральной совокупности X называется ряд результатов наблюдений $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, полученных путем случайного выбора элементов генеральной совокупности.

Число элементов выборки есть *объем выборки* (в данном случае n).

Если выборка содержит информацию для получения с достаточной достоверностью выводов об изучаемых свойствах объектов, то она называется *представительной* (*репрезентативной*).

8. Группировка и представление экспериментальных результатов

Последовательность значений выборки, записанная в возрастающем (неубывающем) порядке, называется *вариационным рядом* $\{y_j\}$ ($j = \overline{1, n}$): $y_j \leq y_{j+1}$.

Если случайная величина является дискретной или результаты измерений непрерывной случайной величины достаточно грубо округляются, то наблюдаемые значения реализаций могут повторяться и тогда отдельные значения вариационного ряда приобретают кратность (*абсолютную частоту*) n_j , превышающую единицу. В этом случае вариационный ряд может быть «сжат» и преобразован к совокупности

$\{y_j, n_j\}$ ($j = \overline{1, M}$): $y_j < y_{j+1}$ ($n_j \geq 1, M < n$)

Эмпирическим распределением вероятностей дискретной случайной величины называют функцию, определенную на множестве допустимых значений y_j ($j = \overline{1, M}$) случайной величины и принимающую в этих точках значения, равные *относительным частотам* $w_j = \frac{n_j}{n}$. Если какие-либо допустимые значения не вошли в вариационный ряд, то их частоты полагают равными нулю.

Очевидно, что: $\sum_{j=1}^M w_j = 1$; $\sum_{j=1}^M n_j = n$.

При анализе законов распределения непрерывных случайных величин весь интервал $[y_1; y_n]$ значений вариационного ряда $\{y_j\}$ разбивается на k равных, частных интервалов $[y_j; y_{j+1}]$ ($j = \overline{1, k}$).

Число интервалов группировки может выбираться на основе опыта или с помощью некоторых эвристических соотношений, например по формуле Стэрджеса: $k \approx 1 + \log_2 n$ с округлением до ближайшего целого.

Длину интервала группировки (шаг) h можно определить, разделив размах выборки $w = y_{\max} - y_{\min}$ на количество интервалов группировки: $h = \frac{w}{k}$.

Для интервального вариационного ряда *абсолютной частотой* n_j является число элементов выборки, попавших в каждый интервал.

Относительной частотой w_j является доля элементов в каждом интервале ко всем элементам: $w_j = \frac{n_j}{n}$.

Установив интервалы разбиения, однозначно определяются относительные частоты w_1, w_2, \dots, w_n .

В результате весь массив экспериментальных результатов можно представить в виде таблицы:

Группировка экспериментальных результатов

№ интервала	Значение показателя y	Число элементов в i интервале, n_j	Относительная частота, w_j
1	$y_{\min} \leq y < y_1$	n_1	w_1
2	$y_1 \leq y < y_2$	n_2	w_2
...	
k	$y_{k-1} \leq y \leq y_{\max}$	n_k	w_k

Относительные частоты w_j зависят от случайных элементов выборки y_1, y_2, \dots, y_n , поэтому должны рассматриваться как k случайных величин.

Эмпирическим законом распределения непрерывной случайной величины называют совокупность частных интервалов и соответствующих им относительных частот w_j ($j = \overline{1, k}$).

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частные интервалы, имеющие длину h с высотами, равными $\frac{w_j}{h}$ (плотность относительной частоты). Площадь гистограммы равна единице:

$$h \cdot \sum_{j=1}^k \frac{w_j}{h} = 1.$$

Если в интервальном вариационном ряду за варианты y принимать серединные значения каждого интервала, то тогда интервальный ряд можно рассматривать как дискретный и графически изображать в виде *полигона* – ломаной с вершинами в точках (y, w_y) .

9. Статистики и точечная оценка

Всякая функция выборки $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$, которая зависит только от наблюдений, называется *статистикой*. Статистика является случайной величиной, так как сама определяется по значениям случайной величины.

Если статистика выступает в качестве приближенного значения какой-либо неизвестной величины, то она называется *статистической оценкой* (или просто оценкой) этой величины. Принято истинное значение случайной величины обозначать θ , а ее оценку – $\hat{\theta}$.

Оценка с использованием статистик, характеризующаяся одним числом, называется *точечной оценкой*.

Ясно, что не всякая статистика может служить надежной оценкой для θ . Возникает вопрос о требованиях к оценкам. Наиболее распространены требования *состоятельности, несмещенности и эффективности*.

Оценка $\hat{\theta}$ называется *состоятельной*, если при неограниченном увеличении объема выборки n она сходится по вероятности к истинному значению параметра θ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta - \hat{\theta}_n| < \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0$$

Оценка $\hat{\theta}$ называется *несмещённой*, если её математическое ожидание равно θ при любом n , т.е. $M(\hat{\theta}) = \theta$ в противном случае оценка считается смещённой. Несмещенность оценки гарантирует отсутствие систематической ошибки.

Несмещенная оценка $\hat{\theta}$, имеющая минимально возможную дисперсию, называется *эффективной*.

Наибольшее распространение получили следующие точечные оценки, удовлетворяющие вышеуказанным условиям:

– выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$;

- исправленная выборочная дисперсия $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$;

– испр. выборочная ковариация $K_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$;

– выборочный коэффициент корреляции $r_{x,y} = \frac{K_{xy}}{S_x \cdot S_y}$;

– выборочный коэффициент вариации $V_x = \frac{S_x}{\bar{x}}$.

Если средняя арифметическая рассчитывается на основе использования всех вариантов значений признака, то *медиана* и *мода* характеризуют величину того варианта, который занимает определенное положение в ранжированном вариационном ряду.

Медиана (Me) - это величина, которая соответствует значению, находящемуся в середине ранжированного ряда.

Модой (Mo) называют значение признака, которое встречается наиболее часто.

10. Понятие доверительного интервала

Задачу интервального оценивания можно в общем виде сформулировать так: по данным выборки найти такой интервал, в котором с определенной вероятностью будет находиться оцениваемый параметр.

Доверительный интервал для параметра θ – это такой интервал, относительно которого можно сказать, что с вероятностью $p = 1 - \alpha$, близкой к единице, он содержит неизвестное значение параметра θ , т.е. $P(\theta_n^{(1)} < \theta < \theta_n^{(2)}) = 1 - \alpha$.

Чем меньше величина интервала $d = |\theta_n^{(2)} - \theta_n^{(1)}|$, тем точнее оценка параметра θ .

Величина доверительного интервала зависит от элементов выборки, поэтому значение $\theta_n^{(1)}$ и $\theta_n^{(2)}$ для одного и того же параметра могут меняться при изменении выборки.

Вероятность $p = 1 - \alpha$ принято называть *доверительной вероятностью*, а число α – *уровнем значимости*.

11. Распределения, связанные с нормальным (χ^2 , Стьюдента, Фишера)

Пусть X распределена нормально с параметрами m_x, σ (будем обозначать это кратко так: $X \in N(m_x; \sigma)$).

Распределением χ^2 называется распределение суммы квадратов независимых случайных величин $X_i \in N(0;1)$, т.е. величина $\chi_k^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2$. Число k называется числом степеней свободы. С увеличением k распределение χ^2 медленно приближается к нормальному.

Пусть теперь $X \in N(0;1)$ – случайная величина, независимая от случайной величины Y , распределенной по закону χ^2 с k степенями свободы.

Тогда величина $T = \frac{X}{\sqrt{Y/k}}$ имеет *распределение Стьюдента* (t -распределение) с k степенями свободы.

С увеличением k распределение Стьюдента быстро стремится к нормальному.

Пусть $F(k_1, k_2) = \frac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}$, где $\chi^2(k_1)$ и $\chi^2(k_2)$ – независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 с k_1 и k_2 степенями свободы. Распределение случайной величины $F(k_1, k_2)$ называется *распределением Фишера* с k_1 и k_2 степенями свободы.

Эти распределения играют большую роль в таких разделах математической статистики, как интервальное оценивание и проверка статистических гипотез.

При использовании различных методов математической статистики широко используются понятия q -квантилей $u_q(F)$ распределения $F(x)$.

Квантилем уровня q (или q -квантилем) непрерывной случайной величины X , обладающей непрерывной функцией распределения $F(x)$ называется такое возможное значение $u_q(F)$

этой случайной величины, для которого вероятность события $\{X < u_q(F)\}$ равна заданной величине q , т.е.

$$F(u_q) = P(X < u_q) = q.$$

Для ряда наиболее часто встречающихся в статистической практике законов распределения составлены таблицы квантилей.

12. Построение доверительных интервалов

Если случайная величина X *распределена нормально*, то можно заменить распределение X на распределение статистики t с параметрами \bar{x} и S . Если $p = 1 - \frac{\alpha}{2}$, а n - объем выборки, можно воспользоваться таблицей квантилей распределения Стьюдента и найти такое значение t , что

$$P\left(\left|\bar{x} - m_x\right| \frac{\sqrt{n-1}}{S} < t\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда с вероятностью p можно утверждать, что интервал:

$\left[\bar{x} - t_\alpha(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_\alpha(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$ является доверительным для оценки неизвестного параметра m_x , где $t_\alpha(k)$ - квантиль распределения Стьюдента уровня α , $k = n - 1$ - число степеней свободы.

Построение доверительного интервала для неизвестной дисперсии совокупности экспериментальных результатов основывается на том, что исправленная выборочная дисперсия S^2 есть величина случайная и с некоторой ошибкой дает оценку истинной дисперсии σ^2 . Следовательно, можно, как и для \bar{x} , вычислить интервал около S^2 , в котором с определенной вероятностью (надежностью) находится истинное значение σ^2 , при условии, что случайная величина X *распределена нормально*.

Для интервальной оценки среднеквадратичного отклонения служит выражение:

$$\frac{S\sqrt{k}}{\sqrt{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(k)}} < \sigma < \frac{S\sqrt{k}}{\sqrt{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(k)}},$$

где $\chi_p^2(k)$ - квантиль распределения χ^2 с $k = n - 1$ степенями свободы.

13. Понятие о статистической гипотезе

Под *статистической гипотезой* понимают всякое высказывание о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Статистические гипотезы классифицируют на два вида:

- гипотезы о законах распределения,
- гипотезы о параметрах распределения.

Задача проверки гипотезы о параметрах распределения в общем виде можно сформулировать так: нужно проверить гипотезу о том, что параметр θ , характеризующий случайную величину X , принимает значение θ_0 .

Эта гипотеза называется *нулевой* и обозначается H_0 . Гипотеза о том, что параметр θ принимает значение θ_1 , называется *конкурирующей* и обозначается H_1 . Иногда гипотезу H_1 называют альтернативной гипотезой.

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий (проверка точности)

Рассмотрим две выборки X_1 и X_2 случайной величины X , подчиняющейся нормальному закону распределения. Выборки X_1 и X_2 взяты из разных совокупностей.

Проверим гипотезу H_0 о том, что $\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$.

Для оценки дисперсий совокупностей результатов воспользуемся значениями выборочных дисперсий, следовательно, задача проверки гипотезы H_0 сводится к сопоставлению дисперсий

$S_{x_1}^2$ и $S_{x_2}^2$. Законом совместного распределения статистик $S_{x_1}^2$ и $S_{x_2}^2$ является F -распределение, называемое распределени-

ем Фишера-Снедекора. Случайную величину F определяют как соотношение большей дисперсии к меньшей: $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, поэтому случайная величина принимает значения, не меньшие единицы. Затем, выбрав необходимый уровень значимости α по таблице квантилей F -распределения находим значение $F_\alpha(k_1, k_2)$, которое сравниваем с вычисленным значением F . Если окажется, что $F < F_\alpha(k_1, k_2)$ то проверяемая гипотеза не отвергается; если же соотношение обратное, т.е. $F > F_\alpha(k_1, k_2)$, то выдвинутая гипотеза отвергается.

Проверка гипотезы о равенстве средних (сравнение результатов измерений)

Пусть имеются две независимые выборки результатов наблюдений случайной величины X объемом n_1 и n_2 . Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения. Будем считать выборки из разных генеральных совокупностей X_1 и X_2 одной и той же случайной величины X .

Необходимо проверить нулевую гипотезу H_0 , состоящую в том, что $M(X_1) = M(X_2)$. Числовые значения дисперсий для генеральных совокупностей неизвестны, поэтому необходимо пользоваться их оценками.

Если гипотеза H_0 справедлива, то величина t

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cdot \frac{(n_1 - 1)S_{x_1}^2 + (n_2 - 1)S_{x_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

имеет распределение Стьюдента.

Определим $k = n_1 + n_2 - 2$, причем в этом случае это значение будет соответствовать числу степеней свободы t – совместного распределения.

Если вычисленное значение $t < t_{\alpha}(k)$, то с вероятностью $p = 1 - \alpha$ можно считать расхождение средних значений незначимым (случайным) и данные выборки можно объединить, т.е. нулевая гипотеза принимается.

Если значение $t > t_{\alpha}(k)$, то с вероятностью $p = 1 - \alpha$ выдвигнутая гипотеза о равенстве средних отвергается, видимо расхождение между средними значениями выборок неслучайно.

Проверка гипотезы о законе распределения

Необходимо установить: какому закону распределения подчиняется случайная величина. Сравнение эмпирического распределения и теоретического (закона распределения) осуществляется с помощью специально подобранной функции - *критерия согласия*. Наиболее часто употребляемый критерий согласия – критерий Пирсона.

Всю область значений случайной величины, представленной в выборке, следует разбить на l интервалов и подсчитать количество элементов выборки n_j , попавших в каждый из интервалов Δ_j . Распределение частот значений n_j по интервалам представляет собой эмпирическое распределение случайной величины.

В теоретическом распределении определяется вероятность p_j попадания случайной величины X в интервал Δ_j , используя то теоретическое распределение, о котором выдвинута гипотеза. Для выборки теоретическое число значений случайной величины X попавших в интервал Δ_j , можно рассчитывать как np_j .

Полученные значения представлены в виде таблицы:

Интервалы	Δ_1	Δ_2	Δ_3	...	Δ_k
Эмпирические частоты	n_1	n_2	n_3	...	n_k
Теоретические частоты	np_1	np_2	np_3	...	np_k

Здесь: $\sum_{j=1}^k n_j = n$, $\sum_{j=1}^k p_j = 1$.

Степень расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами оценивается по критерию согласия Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}.$$

Критерий Пирсона имеет распределение χ^2 -квадрат со степенями свободы $(k - r - 1)$, где r – число параметров распределения $F(X)$.

Рассчитав значение χ^2 и выбрав уровень значимости α , по таблице χ^2 - распределения определяют $\chi_\alpha^2(k)$. Если $\chi^2 < \chi_\alpha^2(k)$, то гипотезу H_0 о законе распределения случайной величины принимают; если $\chi^2 > \chi_\alpha^2(k)$, то гипотезу H_0 отвергают.

14. Линейная корреляция и регрессионный анализ

Основная задача корреляционного анализа – установление тесноты связи между случайными переменными (величинами).

Рассмотрим случай корреляции на примере двух случайных величин (Y, X) . Связь между двумя случайными величинами можно выразить через корреляционный момент K или ковариацию: $K_{xy} = M((Y - M(Y)) \cdot (X - M(X)))$.

Чтобы избежать влияния величины рассеяния на корреляционный момент, перейдем к безразмерной характеристике:

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Эту безразмерную характеристику называют *коэффициентом линейной корреляции* случайных величин.

Две случайные величины называются *коррелированными*, если коэффициент корреляции отличен от нуля. Если $\rho = 0$, то величины Y и X некоррелированы.

Таким образом, если случайные величины Y и X независимы, то они и некоррелированы.

Оценку теоретическому значению коэффициента линейной корреляции ρ обозначим как r :

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{S_x \cdot S_y},$$

где $K_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$ - несмещённая оценка ковариации,

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - \text{оценки дисперсий.}$$

Пусть вычисленное значение $r \neq 0$. Возникает вопрос, объясняется ли это действительно существующей линейной корреляционной связью между переменными X и Y в генеральной совокупности или является следствием случайности отбора переменных в выборку (то есть при другом отборе возможно, например, $r=0$ или изменение знака r).

Выдвигают нулевую гипотезу $H_0: \rho = 0$. Для проверки вычисляют статистику $t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$, которая подчиняется распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 2$. По таблице определяют значение t -критерия для выбранного значения α (уровня значимости) и числа степеней свободы k .

Если расчетное значение $|t| \geq t_\alpha(k)$, то нулевую гипотезу об отсутствии корреляционной связи следует отвергнуть; переменные считают зависимыми.

Регрессионный анализ – это способ описания зависимости между переменными по экспериментальным результатам. В отличие от корреляционного анализа, в котором также анализируются связи между переменными, в регрессионном анализе одна из переменных должна быть случайной (варьируемой), т.е. она выступает в роли фактора, от которого зависит исследуемый параметр.

Зависимость между y и фактором x предполагается или установлена (например, в результате корреляционного анализа), необходимо описать эту зависимость уравнением (моделью) и доказать адекватность уравнения экспериментальным результатам. Это и будет входить в задачу регрессионного анализа.

Регрессию можно строить как y по x , так и x по y .

Уравнения регрессий имеют вид:

$$y - \bar{y} = \frac{K_{xy}}{S_x^2} (x - \bar{x}), \quad x - \bar{x} = \frac{K_{xy}}{S_y^2} (y - \bar{y}).$$

Проверка гипотез о значимости коэффициентов регрессии и корреляции равносильна проверке гипотезы о существенности линейного уравнения регрессии.

Множество пар на плоскости вида (x_i, y_i) , а также прямые регрессий y по x и x по y образуют *поле корреляции*. Точка с координатами (\bar{x}, \bar{y}) называется *центром рассеивания*.

Прямые пересекаются в точке (\bar{x}, \bar{y}) под определённым углом. Чем ближе этот угол к 90° , тем ближе к нулю линейный коэффициент корреляции. Обратное тоже верно.

Лабораторно-практическое занятие №5

Анализ выборочных данных по двум сериям измерений

Задание

1. Обработка результатов измерений

- Записать выборку объема $n = n_1 + n_2$ в виде вариационного ряда.
- Найти x_{\min} , x_{\max} , размах выборки.
- Найти моду и медиану вариационного ряда.
- Записать выборку объема $n = n_1 + n_2$ в виде группированного статистического ряда. Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, разбить на $k \approx 1 + \log_2 n$ непересекающихся интервалов. Вычислить частоты.
- Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.
- Построить гистограмму и полигон частот группированной выборки.

2. Точечные оценки параметров

- Найти оценку математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения для объединённых данных.

3. Интервальные оценки параметров

- Построить доверительные интервалы для полученных оценок при заданной доверительной вероятности (надежности) $P = 0,95$.

При выполнении работы рекомендуется принять следующие обозначения:

\bar{x} - выборочное среднее по объединенным данным;

S – оценка стандартного отклонения по объединенным данным;

n_i - эмпирические частоты;

w_i - относительные частоты;

z_i - середина интервала группировки;

Все вычисления производить до трёх знаков после запятой.

Лабораторно-практическое занятие №6

Проверка статистических гипотез по двум сериям измерений

Задание

- Найти оценку математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения по каждой серии.
- Проверить гипотезу о равенстве дисперсий (критерий Фишера) при заданной доверительной вероятности (надежности) $P = 0,95$.
- Вычислить сводную оценку дисперсии.
- Проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий (критерий Стьюдента) при заданной доверительной вероятности (надежности) $P = 0,95$.
- Проверить гипотезу о нормальном распределении объединенных данных двух выборок (критерий Пирсона) при заданной доверительной вероятности (надежности) $P = 0,95$.
- По всем гипотезам сделать выводы.

При выполнении работы рекомендуется принять следующие обозначения:

\bar{x}_i , – оценка математического ожидания по 1-й и 2-й сериям;

S_1, S_2 – оценка среднеквадратического отклонения по 1-й и 2-й сериям;

$S_{св.}^2$ - сводная оценка дисперсии;

F^* – эмпирическое значение критерия Фишера;

T^* – эмпирическое значение критерия Стьюдента;

\hat{p}_i - вероятности теоретического распределения;

χ^2 – эмпирическое значение критерия Пирсона.

Все вычисления производить до трёх знаков после запятой.

Лабораторно-практическое занятие №7

Исследование линейной корреляции и построение уравнений линейной регрессии

Задание

Заданы результаты N экспериментов, в каждом из которых измерялось значение величин X и Y . Требуется найти эмпирический коэффициент корреляции, уравнения эмпирических прямых регрессии и сделать вывод о силе и характере связи между X и Y .

Для этого необходимо рассчитать:

- Оценку математического ожидания \bar{x}, \bar{y} для каждой величины.
- Оценку стандартного отклонения S_x, S_y .
- Оценку ковариации \tilde{K}_{xy} .
- Эмпирический коэффициент линейной корреляции r_{xy} .
- Уравнения эмпирических прямых регрессии.
- Построить поле корреляции.
- Проверить гипотезу о значимости коэффициента линейной корреляции r_{xy} с доверительной вероятностью 0,95.

Указания к выполнению лабораторных работ по математической статистике.

Обработка результатов измерений

Рассмотрим выборку объёма $n = n_1 + n_2$, где n_1 – число данных по первой серии измерений, n_2 – по второй серии, и упорядочим по возрастанию – получим вариационный ряд. Моду и медиану найдём по определению, используя данные вариационного ряда. Затем представим выборку в виде группированного статистического ряда. Для этого найдём длину интервала группировки $h = \frac{\text{размах}}{\text{число интервалов}}$. Вычислим частоты n_i – количество данных

объединённой выборки, попавших в i -й интервал и относительные частоты $\frac{n_i}{n}$.

Замечание. Если элемент совпадает с верхней границей интервала, то его нужно отнести к последующему интервалу, если он совпадает с нижней границей, то он учитывается в данном интервале. После вычислений необходимо проверить условия нормировки $\sum_{i=1}^k n_i = n$ и $\sum_{i=1}^k w_i = 1$, где n – объём выборки.

Затем вычисляются накопленные частоты $\sum_{j=1}^i n_j$ – количество элементов, попавших в интервалы с 1-го по i -ый и относительные накопленные частоты $\sum_{j=1}^i \frac{n_j}{n}$, где j – указывает номер интервала, n_j – частота элементов в j -том интервале.

Результаты сведём в таблицу, называемую таблицей частот группированной выборки:

Номер интервала	Границы интервала	Середина интервала	Частота	Накопленная частота	Относительная частота	Накопленная относительная частота
i	y_{i-1}, y_i	z_i	n_i	$\sum_{j=1}^i n_j$	$w_i = \frac{n_i}{n}$	$\sum_{j=1}^i \frac{n_j}{n}$

Точечные оценки параметров

Выборочное среднее \bar{x} , исправленную выборочную дисперсию S^2 и эмпирический стандарт S вычислим по следующим формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}{n-1}.$$

Интервальные оценки параметров

Предполагая, что результаты измерений независимы и имеют нормальное распределение параметрами m и σ построим доверительные интервалы по формулам:

$$\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{k}} \cdot t_{\alpha}(k) < m < \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{k}} \cdot t_{\alpha}(k),$$

где $t_{\alpha}(k)$ - квантиль распределения Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы и уровнем значимости $\alpha = 1 - P$.

$$\frac{\sqrt{k} \cdot S}{\sqrt{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(k)}} < \sigma < \frac{\sqrt{k} \cdot S}{\sqrt{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(k)}},$$

где $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(k)$, $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(k)$ - квантили распределения Пирсона с $k = n - 1$ степенями свободы.

Проверка статистических гипотез

Для проверки гипотез необходимо предварительно вычислить выборочное среднее и выборочную дисперсию по каждой серии по вышеуказанным формулам.

а) Гипотеза о равенстве дисперсий (критерий Фишера).

Проверяемая гипотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ - дисперсии обеих серий равны, альтернативная гипотеза $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (односторонний критерий).

Пусть S_1^2, S_2^2 - оценки дисперсий по первой и второй сериям измерений, причём $S_1^2 > S_2^2$. Разделив большую выборочную дисперсию на меньшую, составим статистику

$$F^* = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Затем, выбрав по таблице квантилей F -распределения, находим значение $F_\alpha(k_1, k_2)$, которое сравниваем с вычисленным значением F^* и делаем вывод.

После проверки гипотезы вычислим сводную оценку дисперсии

$$S_{св}^2 = \frac{S_1^2 \cdot k_1 + S_2^2 \cdot k_2}{k_1 + k_2}.$$

б) Гипотеза о равенстве математических ожиданий (критерий Стьюдента).

Проверяемая гипотеза $H_0 : m_1 = m_2$ – математические ожидания обеих серий

равны, альтернативная гипотеза $H_1 : m_1 \neq m_2$ (двухсторонний критерий).

Составим статистику – отношение Стьюдента

$$T^* = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{S_{св} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}.$$

Полученное значение T^* сравним с табличным значением $t_\alpha(k)$ – квантиль распределения Стьюдента с $k = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы, делаем вывод.

в) Гипотеза о нормальном распределении (критерий Пирсона).

Проверяемая гипотеза H_0 – генеральная совокупность распределена нормально с параметрами m и σ , т.е. $X \in N(m, \sigma)$, альтернативная

гипотеза $H_1 : X \notin N(m, \sigma)$.

Алгоритм проверки гипотезы:

1. В качестве параметров m и σ возьмём оценки \bar{x} и S из 1-го задания.
2. В группированном статистическом ряде, построенном в задании 1, x_{\min} заменяем на $-\infty$, x_{\max} заменяем на $+\infty$.

Вычисляем оценки \hat{p}_i вероятностей попадания элементов выборки в промежутки Δ_i , $i=1, \dots, k$ группированного статистического ряда по формулам

$$\hat{p}_i = \Phi(b_i) - \Phi(b_{i-1}), \text{ где } b_i = \frac{y_i - \bar{x}}{S}.$$

Здесь $y_0 = -\infty$, $y_k = +\infty$, $\Phi(x)$ - функция стандартного нормального распределения.

Замечание. Если для некоторых промежутков не выполняется условие $n\hat{p}_i \geq 5$, то эти промежутки объединяем с соседними. Промежутки нового группированного статистического ряда по-прежнему обозначаем $\Delta_i = (y_{i-1}, y_i)$, $i=1, \dots, k$.

3. Вычисляем выборочное значение статистики критерия:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}.$$

Здесь k – число промежутков нового группированного статистического ряда (после объединения); n_i - число элементов выборки в i -ом промежутке, $i=1, \dots, k$.

4. Для нормального закона число оцениваемых параметров равно 2, следовательно, число степеней свободы определяем по формуле:
 $r = k - 2 - 1 = k - 3$.

5. Рассчитав значение χ^2 и выбрав уровень значимости α , по таблице χ^2 - распределения определим $\chi_\alpha^2(k)$. Если $\chi^2 < \chi_\alpha^2(k)$, то гипотезу H_0 о законе распределения случайной величины следует принять; если $\chi^2 > \chi_\alpha^2(k)$, то гипотезу H_0 отвергают и принимают альтернативную.

Линейная корреляция и регрессионный анализ

Ковариация, или корреляционный момент, служит для характеристики связи между величинами X и Y . Статистической оценкой ковариации является величина \tilde{K}_{xy} , которая вычисляется по формуле:

$$K_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}).$$

Другой характеристикой наличия связи между X и Y служит коэффициент корреляции ρ_{xy} , эмпирическая оценка которого r_{xy} определяется по

формуле $r_{xy} = \frac{\tilde{K}_{xy}}{S_x \cdot S_y}$.

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной и по абсолютной величине не превышает 1. Если $r \approx \pm 1$, то X и Y связаны тесной

линейной зависимостью, причем для $r_{xy} < 0$ зависимость обратная, а для $r_{xy} > 0$ зависимость прямая. Если $r = 0$, то X и Y – некоррелированы.

Пусть Y является функцией величины X . Тогда уравнение эмпирической прямой регрессии Y на X имеет вид:

$$y - \bar{y} = r_{xy} \frac{S_y}{S_x} \cdot (x - \bar{x}).$$

Если X является функцией величины Y , то уравнение прямой регрессии X на Y имеет вид: $x - \bar{x} = r_{xy} \frac{S_x}{S_y} \cdot (y - \bar{y})$.

Для проверки гипотезы о значимости коэффициента линейной корреляции применим критерий Стьюдента.

Выдвинем гипотезу $H_0: \rho_{xy} = 0$,

альтернативная гипотеза $H_1: \rho_{xy} \neq 0$ (двухсторонний критерий). Вы-

числим статистику $t = r_{xy} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}}$, которая подчиняется распределению

Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 2$ и сравним с табличным $t_\alpha(k)$. Если расчетное значение $|t| \geq t_\alpha(k)$, то нулевую гипотезу об отсутствии корреляционной связи следует отвергнуть; переменные считают зависимыми.

Данные к лабораторно-практическим работам 5,6 по математической статистике

1. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_1=22$ 8.5 9.4 9.1 9.6 8.1 8.4 7.9 9.2
7.5 8.1 7.7 8.2 5.4 8.8 7.4 8.7 7.6 7.9 7.7 6.2 7.8 10.1

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_2=34$ 6.5 6.2 8.1 5.6 9.4 10.3 6.6 7.7
8.7 8.3 3.7 7.7 9.9 6.1 7.9 9.7 6.4 8.8 7.0 11.5 6.4 6.8 5.0 7.0 4.2
8.8 7.3 8.2 6.9 7.2 6.5 8.8 8.2 7.9

2. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_1=40$.41 .26 .59 .63 .98 .54 .54 .85 .55
.80 .31 .74 .30 .56 .75 .54 .60 .74 .28 .53 .81 .46 .63 .61 .66 .78
.72 .50 .48 .42 .54 .81 .84 .46 .56 .39 .50 .53 .47 .47

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_2=20$.73 .51 .59 .88 .47 .60 .83 .80
.49 .78 .55 .68 .81 .60 .32 .41 .53 .58 .63 .51

3. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_1=38$ 19.1 15.9 20.4 16.8 23.1 21.2 28.4
25.8 19.9 22.9 22.6 21.3 27.1 19.1 20.8 24.3 22.7 25.1 26.3 26.9 17.8 20.6
23.7 19.0 18.3 22.3 25.5 21.0 28.9 20.0 17.0 19.9 23.6 29.0 22.8 22.0 23.5
17.7

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_2=21$ 20.9 23.3 24.9 17.5 24.6 21.1 22.1
20.5 21.0 19.7 24.8 25.2 19.3 22.9 24.7 23.0 26.9 23.3 24.7 22.3 19.7

4. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_1=36$ 5.9 5.8 6.6 6.7 4.4 4.4 6.6 6.4 4.4
5.7 5.1 4.9 4.3 4.8 4.5 6.7 7.1 3.6 6.0 5.6 5.0 6.7 6.5 4.3 5.5 3.3
5.1 3.5 4.3 4.4 3.3 6.5 8.0 6.6 5.4 3.0

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_2=22$ 5.2 4.9 4.3 6.2 5.2 4.6 4.0 3.3
5.2 4.1 3.7 5.0 6.0 6.1 2.5 5.2 5.4 4.9 3.7 3.4 5.6 5.5

5. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_1=34$.74 .74 1.02 .63 .53 .80 .58 .66
.56 .30 .46 .80 1.08 .56 .84 .38 .74 .82 .84 .68 .70 .58 .52 .57 .81
.73 .76 .85 .80 .56 .40 .87 .32 .71

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_2=23$.57 .68 .67 .42 .72 .83 .45 .69
.59 .73 .76 .98 .99 .68 .71 .53 .58 .55 1.01 .93 .68 .79 .73

6. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_1=32$ 24.3 21.0 24.1 23.8 20.3 21.6 25.2
26.2 21.2 26.3 25.0 19.8 23.7 27.0 26.4 29.6 23.7 28.0 24.9 19.3 21.9 21.5
29.4 25.5 25.3 25.2 27.7 23.3 28.7 24.5 31.4 21.3

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ $N_2=24$ 18.6 22.5 19.3 24.9 23.5 24.3 28.6
20.5 27.6 19.5 20.6 28.6 27.3 27.1 18.7 24.6 22.5 18.4 25.0 25.3 27.1 18.9
25.4 21.2

7. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 30 5.1 6.4 4.0 8.0 6.2 5.1 5.8 4.7
5.5 6.3 6.5 8.7 5.7 6.0 5.9 8.2 4.7 7.3 3.6 5.6 4.9 8.0 5.7 3.7 8.9
7.1 3.8 4.8 6.6 4.3

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 25 7.3 6.1 4.5 5.7 7.0 7.8 4.5 6.9
6.6 5.9 6.7 5.1 6.6 5.4 7.8 4.7 5.8 4.0 7.1 6.7 6.3 8.0 4.5 6.4 7.0

8. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 28 .77 .97 .82 .77 .78 .92 .76 1.08 .88
.85 .44 .81 .98 .53 .71 .67 .50 .67 1.18 .83 .85 .51 .86 .82 .59 .96
.93 1.08

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 26 1.09 .97 .63 .80 .59 .54 .75 .87
.86 .81 .84 .37 .58 .71 .75 .66 1.10 1.09 .61 1.02 .60 1.07 .95 .89
.49 .42

9. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 26 25.8 18.8 19.9 31.6 30.2 20.7 30.6
25.0 29.1 32.8 33.9 20.2 28.9 28.0 24.7 27.2 27.2 33.8 29.0 26.7 29.6 28.8
31.3 28.5 29.0 34.8

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 27 29.0 28.8 30.4 21.5 37.2 25.7 32.9
27.3 28.2 34.3 29.3 31.0 33.2 26.9 37.0 36.0 29.1 33.2 40.2 34.3 29.6 33.4
33.0 31.0 34.7 38.4 25.0

10. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 24 6.5 6.7 5.9 6.6 4.2 4.4 7.3 4.9
8.0 4.2 4.0 6.2 5.8 5.8 8.8 6.9 6.8 7.6 7.0 6.7 4.6 5.1 7.1 6.7

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 28 3.6 6.4 5.0 3.7 5.5 5.4 5.8 1.6
4.3 6.0 7.8 4.6 5.0 6.7 5.4 5.6 4.6 7.0 7.2 5.3 7.1 5.6 4.5 6.9 5.6
6.1 7.0 4.7

11. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 22 .97 .81 .91 .90 .86 .83 .96 .75
1.05 .91 .80 .79 .80 .66 .92 .61 .58 1.06 .76 1.38 .80 .81

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 29 .25 .70 .89 .60 .70 .93 .79 .43
.89 1.07 .89 .90 .97 .69 1.10 1.10 .99 1.01 1.16 1.33 .94 .98 1.32 .61
.72 .62 .48 .72 .80

12. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 30 35.0 31.8 34.4 27.7 33.1 27.1 27.8
30.8 29.4 27.2 27.3 32.4 30.0 36.5 25.7 35.5 26.3 39.6 32.8 34.8 25.6 32.5
32.4 31.2 32.6 28.9 29.1 34.1 35.1 29.0

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 30 34.3 25.6 30.5 25.6 31.6 34.0 24.6
31.7 31.3 31.3 32.5 23.9 32.1 31.1 31.6 39.5 35.4 28.2 30.1 30.6 26.6 25.9
27.2 26.3 30.8 29.6 32.2 32.4 28.2 32.2

13. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 28 6.5 8.4 6.5 6.2 7.5 7.8 8.9 3.6
6.4 5.8 6.7 7.5 8.7 6.9 9.1 8.0 6.1 7.7 8.0 7.8 8.4 7.4 5.5 4.3 8.4
6.3 4.2 7.7

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 31 5.1 9.2 9.8 8.1 8.6 6.4 5.7 6.6
8.7 9.4 8.4 6.8 8.0 5.0 4.9 5.3 7.6 8.2 7.4 8.9 8.3 8.4 6.4 8.1 5.1
9.2 5.7 6.8 8.5 5.3 7.9

=====

14. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 26 .97 1.04 .79 1.04 .71 .90 .73 .99
.79 1.18 1.21 .96 1.21 .80 1.14 1.18 1.10 .85 .66 .92 1.16 .71 .82 .53
1.21 1.25

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 32 1.25 .68 .93 .73 1.04 .79 .88 .73
1.08 1.20 1.01 1.06 .79 .97 1.04 1.26 1.24 .99 .76 .75 .93 1.09 1.27
.81 .90 .55 .68 1.08 .89 1.05 1.00 .90

=====

15. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 24 31.6 46.6 42.0 35.6 31.3 29.5 23.8
36.9 33.5 37.7 23.1 37.1 30.7 36.7 39.6 40.0 38.1 27.6 36.6 43.5 33.6 36.2
28.4 24.7

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 33 37.3 31.4 34.5 45.6 23.4 34.2 40.8
40.1 37.8 33.8 36.7 30.3 38.3 33.7 30.0 37.8 32.6 37.5 41.2 38.6 35.8 37.7
39.0 32.2 32.2 35.7 40.5 39.2 26.7 35.2 33.6 32.3 33.9

=====

16. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 22 6.3 7.0 7.1 5.5 8.0 10.1 5.7 6.7
5.8 7.6 6.5 5.6 10.3 9.7 6.0 7.6 5.2 9.2 7.4 8.9 9.6 8.3

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 34 6.3 5.7 8.8 7.5 6.3 7.2 7.2 8.3
7.5 8.9 8.2 6.4 6.0 5.2 6.0 5.5 9.7 4.4 4.9 10.0 8.0 6.4 7.7 7.5 8.7
7.4 6.1 5.6 8.4 3.6 6.5 9.6 9.9 3.0

=====

17. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 30 30.7 33.4 35.7 32.7 28.6 35.7 30.9
24.1 29.1 31.7 34.5 37.1 26.2 35.0 27.6 43.9 28.9 37.4 34.6 30.4 31.1 31.0
34.6 31.6 29.8 27.1 29.6 34.7 31.1 29.5

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 30 37.7 30.2 32.0 31.7 34.5 23.3 35.0
28.6 36.1 26.1 32.8 25.2 32.1 28.0 36.1 27.3 24.6 22.0 33.5 35.1 30.0 23.0
27.6 32.9 31.8 29.4 27.8 28.0 24.0 28.5

=====

18. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 28 6.4 4.5 7.0 8.0 10.3 8.0 8.5 7.1
9.2 7.4 4.8 7.7 5.8 4.9 6.8 5.1 4.1 6.8 5.7 6.2 7.4 5.3 7.8 7.4 7.4
8.7 7.4 6.4

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 31 6.6 8.0 8.1 6.9 6.2 5.7 6.8 7.2
8.0 5.3 8.7 7.9 8.2 5.5 9.4 8.7 7.8 5.4 6.5 9.6 6.7 7.1 6.2 8.6 5.2
7.2 6.1 3.8 5.5 6.7 6.4

=====

19. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 26 1.18 .90 1.29 .87 1.34 .71 .68 1.29
1.21 .76 1.16 1.20 1.01 .72 .80 .75 1.01 .73 1.40 .68 .79 .63 1.15 .77
.63 .72

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 32 .62 .50 .71 .76 .35 1.26 .96 .62
1.02 1.51 .68 1.11 .82 1.34 .62 .89 .58 .83 1.22 .75 1.01 .76 .80 .84

.86 .83 .91 .78 .95 1.04 .98 1.11

=====

20. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 24 26.9 30.4 38.9 41.1 35.3 34.4 27.2
29.6 28.8 33.6 31.0 28.8 35.4 39.6 28.2 35.6 31.9 29.7 42.9 29.8 30.6 30.0
35.3 29.6

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 33 38.9 29.7 26.3 42.0 32.8 43.9 31.3
27.5 44.1 40.7 35.7 27.8 40.8 26.0 35.5 36.8 33.3 39.2 32.5 35.5 36.5 33.7
31.9 34.6 31.7 36.4 39.9 31.8 36.3 42.6 35.0 32.3 33.8

=====

21. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 40 .50 .54 .38 .65 .59 .40 .65 .46
.69 .48 .77 .38 .83 .54 .58 .71 .59 .65 .73 .62 .51 .75 .54 .43 .68
.60 .58 .62 .26 .46 .60 .71 .76 .81 .54 .53 .28 .69 .46 .67

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 20 .55 .35 .59 .41 .82 .50 .62 .50
.55 .69 .44 .48 .67 .72 .29 .55 .36 .50 .76 .41

=====

22. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 38 18.2 19.0 24.5 20.1 20.4 21.0 25.0
17.5 20.0 19.0 21.1 16.3 18.5 18.9 22.7 25.2 25.3 23.3 18.9 23.3 20.0 21.3
18.9 20.7 24.3 21.3 19.6 20.6 18.4 23.6 21.1 20.5 19.1 19.5 22.4 22.1 18.7
23.9

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 21 20.5 24.7 26.5 19.7 18.9 22.4 23.7
18.4 22.1 18.8 20.4 20.2 22.5 24.1 21.6 22.7 23.6 26.2 23.8 17.5 25.3

=====

23. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 36 6.6 4.9 5.0 5.8 5.5 5.4 4.3 7.5
5.5 6.3 6.7 6.2 4.3 7.9 5.2 5.0 3.9 5.0 4.3 6.3 3.7 4.8 6.0 4.6 5.0
5.0 5.5 6.7 5.7 4.9 4.6 3.8 6.3 5.2 5.3 5.2

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 22 5.5 7.2 7.3 4.6 4.8 5.5 5.1 3.8
4.8 6.5 5.2 3.6 4.4 4.2 5.8 4.6 4.3 5.8 3.5 5.6 6.3 5.9

=====

24. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 34 .85 .75 1.10 .82 .70 .95 .55 .68
.72 .71 .54 .68 .60 .87 .64 .74 .73 .56 .43 .63 .98 .62 .56 .66 .83
.67 1.06 .52 .85 .60 .47 .75 .86 .65

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 23 .55 .69 .40 .92 .86 .59 .70
.81 .74 .96 .53 .55 .89 .78 .45 .57 .91 .62 .68 .60 .65 .95 .84

=====

25. 1 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N1= 32 26.6 27.9 25.6 21.1 27.1 31.4 21.3
23.1 21.4 31.6 20.0 23.9 23.6 26.7 25.4 27.4 26.7 19.3 26.2 18.4 27.8 22.4
27.1 20.8 25.7 23.9 27.4 26.3 26.4 25.3 26.2 18.8

2 СЕРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ N2= 24 23.4 21.5 22.3 31.8 28.0
21.6 21.6 19.0 26.3 22.2 27.3 23.7 29.4 21.6 26.8 26.9 20.7 26.0
22.2 27.0 20.3 22.1 18.3 14.7

Данные к лабораторно-практической работе №7 по математической статистике

В ней исследуется ИЗМЕНЕНИЕ СОСТАВА МЕТАЛЛА ПРИ
ВЫПУСКЕ ИЗ КОНВЕРТОРА

1. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000

-1.0 -3.5 3.5 1.0 -5 .5 .0 1.5 4.5 1.0 -2.5 4.0 .0 -1.5
-5 2.5 3.5 .0 .0 3.5 -1.0 5.0 3.5 1.0 .0 3.5

N = 26 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ УГЛЕРОДА, %

.09 .06 .10 .12 .09 .09 .04 .05 .06 .08 .09 .15 .06 .07 .06
.04 .07 .06 .08 .09 .06 .12 .15 .08 .08 .08

2. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000

3.0 5.5 4.0 3.0 -1.0 -5 5.0 1.5 3.0 -5 2.0 1.5 .0 -1.5 4.0
.0 .5 3.5 1.5 -3.0 -1.0 1.0 2.5 -1.0 2.0 -2.5 -1.5

N = 27 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ КИСЛОРОДА, %

.035 .023 .033 .039 .060 .054 .026 .039 .041 .053 .032 .029 .057
.063 .028 .060 .054 .027 .042 .065 .054 .044 .035 .055 .030 .072
.050

3. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000

1.5 1.0 .5 .0 .5 2.5 -1.5 6.5 -1.5 -2.0 .0 -1.0 5.5 -1.0 2.0
5.0 -1.0 -3.5 -2.0 1.5 -1.0 3.0 -1.0 .0 .0 -2.5 -1.0 5.0

N = 28 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ МАРГАНЦА, %

.10 .07 .05 .11 .08 .10 .12 .09 .09 .10 .10 .15 .05 .08 .10
.09 .08 .07 .02 .06 .09 .12 .09 .11 .09 .09 .09 .08

4. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000

.0 2.5 1.5 .0 .5 2.0 -5 2.0 1.5 -1.5 .0 2.5 4.5 1.5 5.5
-2.5 .5 -3.0 .5 5.0 .0 -1.0 3.0 .0 .0 -2.5 4.0 .5 .5

N = 29 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ АЗОТА, % *10000

20.0 21.5 31.0 20.0 28.0 23.0 18.5 25.5 23.5 20.5 21.0 32.5 26.0
21.5 30.0 22.0 24.5 24.0 29.0 34.5 19.0 22.0 34.0 22.5 27.5 21.0
27.0 27.0 23.5

5. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000

-1.0 2.5 .0 4.5 .5 -2.5 1.5 4.5 -2.0 1.5 -1.5 1.5 1.5 1.0
-2.5 1.5 -3.0 .0 .0 -2.5 .0 4.0 2.0 1.5 .0 1.0

N = 26 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ УГЛЕРОДА, %

.00 .14 .07 .10 .13 .08 .10 .10 .00 .09 .04 .05 .08 .03 .03
.11 .05 .05 .11 .05 .09 .12 .08 .09 .09 .09

6. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 .5 -2.5 -2.0 3.5 3.0 2.5 .0 3.5 .0 1.0 3.0 -5.0 1.0 -1.5 1.5
 .0 .0 1.5 -1.0 2.5 2.5 .0 1.0 -1.5 2.0 3.0 1.5
 N = 27 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ КИСЛОРОДА, %
 .051 .073 .057 .028 .051 .035 .056 .033 .053 .037 .040 .078 .047
 .062 .042 .056 .056 .036 .053 .041 .033 .040 .052 .063 .036 .030
 .051

=====

7. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 3.0 4.0 .5 -1.0 -.5 -.5 2.5 .0 -2.5 -2.5 2.0 -1.0 -3.0 .5 1.5
 .0 3.0 .0 2.0 1.0 -2.5 .0 -3.5 2.0 .0 .5 .5 4.0
 N = 28 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ МАРГАНЦА, %
 .10 .07 .09 .03 .07 .04 .08 .09 .10 .03 .07 .09 .08 .12 .05
 .14 .03 .06 .08 .10 .10 .09 .07 .10 .10 .10 .08 .05

=====

8. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 -.5 -.5 3.0 .0 -1.5 3.5 .0 -1.5 -2.5 -2.5 2.0 1.0 3.5 3.0 1.5
 -.5 -.5 1.5 -1.0 .5 -1.0 -4.5 3.5 -.5 2.0 1.0 -1.0 2.0 3.0
 N = 29 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ АЗОТА, % *10000
 18.5 20.5 31.0 17.5 14.5 28.5 31.0 20.0 14.0 14.0 29.0 28.0 28.0
 27.0 20.0 23.5 17.5 28.5 22.0 24.0 16.0 3.0 35.5 30.0 28.0 24.5
 22.0 28.5 30.0

=====

9. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 .0 -5 -1.0 3.5 .0 1.0 3.0 -5 -5 .0 3.0 3.5 -1.0 1.0 -5
 3.0 3.0 .5 3.5 -.5 .0 -5 .5 2.0 6.5 1.0 -5 3.5 1.5 .5
 N = 30 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ УГЛЕРОДА, %
 .06 .05 .05 .11 .08 .05 .11 .07 .08 .07 .09 .11 .05 .08 .04
 .10 .09 .06 .13 .05 .06 .07 .06 .11 .15 .08 .06 .10 .08 .06

=====

10. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 .0 -1.0 1.0 .0 1.5 2.0 -2.5 1.0 2.0 2.0 .0 .0 .0 3.0 -2.5
 5.0 4.5 -3.0 2.5 .0 1.0 -5 1.5 3.5 -3.5
 N = 25 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ КИСЛОРОДА, %
 .042 .044 .053 .030 .061 .048 .046 .061 .061 .064 .036 .020 .021
 .058 .043 .059 .057 .028 .052 .046 .042 .017 .065 .062 .019

=====

11. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 1.5 -1.0 .5 .0 .0 -2.0 3.5 -3.0 5.5 .5 1.0 1.0 .0 3.0 .0
 1.5 2.5 1.5 -4.0 2.5 .0 3.5 .0 -1.5 .0 .0
 N = 26 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ МАРГАНЦА, %
 .08 .04 .08 .06 .06 .05 .13 .03 .13 .08 .10 .09 .06 .10 .05
 .08 .12 .09 .02 .10 .08 .11 .05 .05 .07 .06

=====

12. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 -2.5 1.5 1.0 -5 -5 3.0 -2.5 2.5 2.5 3.5 .0 .5 .5 1.0 .0
 .5 .0 .0 -2.0 1.5 -3.0 .0 1.5 -1.5 3.5 .0 1.5
 N = 27 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ АЗОТА, % *10000
 31.0 19.5 19.0 27.0 31.0 20.0 40.0 21.0 17.5 18.0 24.5 22.5 26.5
 23.5 21.0 24.0 18.5 30.0 35.5 21.0 31.5 25.5 22.5 28.5 21.0 24.5
 26.0

=====

13. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 -1.5 -2.0 5.5 1.0 -1.5 1.5 4.5 .0 2.0 -2.0 2.0 .0 1.5 3.5 1.0
 3.5 .0 -5 3.0 .5 2.5 2.5 2.5 -1.5 -1.5 .0 2.5 .5
 N = 28 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ УГЛЕРОДА, %
 .10 .03 .08 .08 .01 .10 .08 .05 .08 .08 .07 .10 .11 .09 .12
 .12 .05 .06 .09 .10 .10 .11 .08 .06 .07 .06 .08 .04

=====

14. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 1.0 -5 -1.0 .0 2.5 2.5 3.5 -1.5 1.5 .5 3.0 -1.0 .5 -3.5 1.0
 .0 3.5 .5 .0 2.0 .0 2.0 3.5 -1.5 -1.5 -5.0 2.5 .5 1.5
 N = 29 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ КИСЛОРОДА, %
 .034 .063 .047 .054 .057 .055 .043 .061 .042 .050 .073 .058 .049
 .033 .078 .038 .049 .063 .026 .062 .035 .045 .045 .025 .021 .047
 .032 .033 .058

=====

15. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 4.5 -1.5 1.0 3.5 -1.5 3.5 .5 -1.5 2.5 4.5 1.0 4.5 4.0 -5.5 1.0
 .5 -1.0 -3.5 -4.5 .5 2.5 1.0 1.5 1.0 -3.0 7.0 2.5 1.0 4.5 .0
 N = 30 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ МАРГАНЦА, %
 .06 .13 .08 .05 .11 .01 .07 .10 .04 .05 .06 .00 .08 .12 .09
 .10 .14 .12 .18 .04 .06 .09 .11 .11 .12 .03 .02 .11 .02 .12

=====

16. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 -2.0 1.0 .0 .5 -3.5 -1.5 3.0 -.5 1.0 .0 1.0 1.0 4.0 1.5 3.0
 -3.0 -3.5 1.0 3.5 2.0 -3.0 2.5 -5 4.5 -1.5
 N = 25 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ АЗОТА, % *10000
 14.0 23.5 21.0 29.5 13.5 25.5 31.0 19.0 25.5 19.5 27.5 24.5 32.0
 27.5 26.5 18.0 14.5 17.0 32.0 27.0 11.5 30.0 20.0 32.5 16.5

=====

17. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 .5 .0 3.0 1.5 -2.0 .5 2.0 5.5 2.5 2.0 4.5 .0 .5 1.0 4.5
 .0 -5 .0 5.5 -1.5 2.0 .0 2.0 1.0 3.0 3.0
 N = 26 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ УГЛЕРОДА, %

.07 .09 .05 .06 .12 .05 .05 .04 .04 .08 .03 .10 .07 .07 .03
.09 .11 .09 .02 .12 .08 .08 .07 .06 .05 .04

18. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000

.0 -2.5 -2.5 1.5 .5 .0 -4.0 2.5 1.0 -.5 .0 -.5 .5 -1.5 1.0
.0 3.0 2.5 3.0 -.5 .5 .0 5.5 6.5 -1.5 -1.5 .5

N = 27 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ КИСЛОРОДА, %

.054 .051 .046 .060 .045 .033 .055 .037 .056 .060 .059 .058 .057
.055 .056 .037 .050 .030 .034 .040 .042 .046 .028 .028 .062 .047
.040

19. X1 - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000

1.5 -1.0 .0 1.0 .5 2.5 3.0 .0 .5 -1.0 1.0 1.5 1.5 -2.0 -2.0 .0
.5 .0 -1.0 6.0 4.0 -2.5 1.0 .0 -4.5 .0 1.0 1.5

N = 28 X2 - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ МАРГАНЦА, %

.07 .06 .08 .14 .08 .13 .11 .11 .11 .10 .06 .10 .09 .05 .09
.09 .06 .06 .05 .11 .08 .06 .02 .07 .04 .11 .05 .09

20. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000

-1.5 .0 -3.0 1.0 .5 .0 4.5 -2.5 1.0 -.5 .0 .0 6.0 2.5 3.0
2.5 2.0 1.0 2.5 4.0 -3.0 .5 2.0 -.5 4.5 .5

N = 26 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ УГЛЕРОДА, %

.06 .10 .04 .09 .10 .08 .10 .02 .07 .05 .05 .08 .12 .10 .10
.12 .07 .07 .10 .11 .05 .06 .07 .00 .12 .08

21. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000

1.5 6.5 3.0 -2.0 3.0 .0 1.5 .5 3.0 1.0 .5 .0 -2.0 .0 -1.0 .0 -
1.0 2.0 -6.5 .5 4.0 6.0 2.0 -.5 3.0 -2.0

N = 26 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ УГЛЕРОДА, %

.07 .00 .05 .11 .05 .09 .07 .08 .05 .07 .08 .09 .11 .09 .10
.08 .10 .05 .18 .08 .03 .00 .05 .10 .05 .11

22. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000

-.5 .0 1.0 2.5 .0 -1.5 2.0 1.0 2.5 3.0 -.5 1.0 -2.0 3.0 3.0 .5
.0 .5 3.0 .5 1.5 1.0 2.0 6.0 2.5 3.5 5.0

N = 27 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ КИСЛОРОДА, %

.048 .053 .058 .061 .038 .053 .037 .064 .032 .071 .046 .037 .042
.046 .059 .043 .054 .066 .052 .054 .055 .057 .050 .064 .068 .067
.057

23. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000

2.5 .5 2.0 .0 .5 2.0 2.5 2.5 -2.0 1.0 4.5 -2.5 1.5 .5 1.0
.0 4.0 1.0 .0 3.5 3.0 .0 1.5 2.5 3.5 -.5 -.5 .0

N = 28 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ МАРГАНЦА, %
 .05 .11 .06 .11 .08 .07 .06 .09 .11 .08 .07 .13 .06 .08 .08
 .07 .05 .09 .08 .04 .08 .10 .07 .07 .02 .10 .14 .08

=====
24. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 .0 2.0 3.0 -4.0 .0 7.5 -1.5 .0 .5 .0 1.0 -1.0 -3.5 4.0 -.5
 2.0 1.5 1.0 1.5 2.0 3.0 -1.5 2.5 1.5 2.5 .0 5.5 2.5 1.0

N = 29 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ АЗОТА, % *10000
 21.0 29.5 34.0 15.0 17.0 37.0 25.0 24.0 28.0 24.0 31.0 18.5 13.5
 31.5 27.0 18.0 27.0 20.0 23.5 29.0 24.0 16.0 22.5 21.5 22.0 23.0
 30.0 21.5 21.5

=====
25. X - ИЗМЕНЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АЗОТА, % *10000
 5.5 4.0 -2.0 .5 2.5 2.0 4.0 -.5 -1.5 2.0 1.0 1.0 .0 1.5
 -1.0 -.5 .5 -1.0 3.5 3.5 1.5 -1.5 -.5 -4.0 2.5 .5 3.5 4.0 -.5
 -1.5

N = 30 Y - НАЧАЛЬНАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ УГЛЕРОДА, %
 .02 .04 .11 .12 .04 .07 .06 .09 .10 .09 .07 .06 .12 .09 .13
 .08 .08 .16 .10 .06 .03 .13 .09 .13 .05 .08 .04 .06 .15 .11

Приложения

Таблица 1. Распределение Пуассона $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

λ k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1216	0.1438	0.1647
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494
4		0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111
5				0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0012	0.0020
6							0.0001	0.0002	0.0003
7									

λ k	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	0.3679	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001
1	0.3679	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011
2	0.1839	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050
3	0.0613	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150
4	0.0153	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337
5	0.0031	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607
6	0.0005	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911
7	0.0001	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171
8		0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318
9		0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318
10			0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186
11			0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970
12			0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728
13				0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504
14				0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324
15					0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194
16						0.0003	0.0015	0.0045	0.0109
17						0.0001	0.0006	0.0021	0.0058
18							0.0002	0.0009	0.0029
19							0.0001	0.0004	0.0014

Таблица 2. Функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

	С о т ы е д о л и									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2402	2466	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1513
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	1010	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

Таблица 3. Функция стандартного нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,5000								
0,01	0,5040	0,31	0,6217	0,61	0,7291	0,91	0,8186	1,21	0,8869
0,02	0,5080	0,32	0,6255	0,62	0,7324	0,92	0,8212	1,22	0,8888
0,03	0,5120	0,33	0,6293	0,63	0,7357	0,93	0,8238	1,23	0,8907
0,04	0,5160	0,34	0,6331	0,64	0,7389	0,94	0,8264	1,24	0,8925
0,05	0,5199	0,35	0,6368	0,65	0,7422	0,95	0,8289	1,25	0,8944
0,06	0,5239	0,36	0,6406	0,66	0,7454	0,96	0,8315	1,26	0,8962
0,07	0,5279	0,37	0,6443	0,67	0,7486	0,97	0,8340	1,27	0,8980
0,08	0,5319	0,38	0,6480	0,68	0,7517	0,98	0,8365	1,28	0,8997
0,09	0,5359	0,39	0,6517	0,69	0,7549	0,99	0,8389	1,29	0,9015
0,10	0,5398	0,40	0,6554	0,70	0,7580	1,00	0,8413	1,30	0,9032
0,11	0,5438	0,41	0,6591	0,71	0,7611	1,01	0,8438	1,31	0,9049
0,12	0,5478	0,42	0,6628	0,72	0,7642	1,02	0,8461	1,32	0,9066
0,13	0,5517	0,43	0,6664	0,73	0,7673	1,03	0,8485	1,33	0,9082
0,14	0,5557	0,44	0,6700	0,74	0,7704	1,04	0,8508	1,34	0,9099
0,15	0,5596	0,45	0,6736	0,75	0,7734	1,05	0,8531	1,35	0,9115
0,16	0,5636	0,46	0,6772	0,76	0,7764	1,06	0,8554	1,36	0,9131
0,17	0,5675	0,47	0,6808	0,77	0,7794	1,07	0,8577	1,37	0,9147
0,18	0,5714	0,48	0,6844	0,78	0,7823	1,08	0,8599	1,38	0,9162
0,19	0,5753	0,49	0,6879	0,79	0,7852	1,09	0,8621	1,39	0,9177
0,20	0,5793	0,50	0,6915	0,80	0,7881	1,10	0,8643	1,40	0,9192
0,21	0,5832	0,51	0,6950	0,81	0,7910	1,11	0,8665	1,41	0,9207
0,22	0,5871	0,52	0,6985	0,82	0,7939	1,12	0,8686	1,42	0,9222
0,23	0,5910	0,53	0,7019	0,83	0,7967	1,13	0,8708	1,43	0,9236
0,24	0,5948	0,54	0,7054	0,84	0,7995	1,14	0,8729	1,44	0,9251
0,25	0,5987	0,55	0,7088	0,85	0,8023	1,15	0,8749	1,45	0,9265
0,26	0,6026	0,56	0,7123	0,86	0,8051	1,16	0,8770	1,46	0,9279
0,27	0,6064	0,57	0,7157	0,87	0,8078	1,17	0,8790	1,47	0,9292
0,28	0,6103	0,58	0,7190	0,88	0,8106	1,18	0,8810	1,48	0,9306
0,29	0,6141	0,59	0,7224	0,89	0,8133	1,19	0,8830	1,49	0,9319
0,30	0,6179	0,60	0,7257	0,90	0,8159	1,20	0,8849	1,50	0,9332

Продолжение таблицы 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,51	0,9345	1,87	0,9693	2,23	0,9871	2,59	0,9952	2,95	0,9984
1,52	0,9357	1,88	0,9699	2,24	0,9875	2,60	0,9953	2,96	0,9985
1,53	0,9370	1,89	0,9706	2,25	0,9878	2,61	0,9955	2,97	0,9985
1,54	0,9382	1,90	0,9713	2,26	0,9881	2,62	0,9956	2,98	0,9986
1,55	0,9394	1,91	0,9719	2,27	0,9884	2,63	0,9957	2,99	0,9986
1,56	0,9406	1,92	0,9726	2,28	0,9887	2,64	0,9959	3,00	0,9987
1,57	0,9418	1,93	0,9732	2,29	0,9890	2,65	0,9960	3,01	0,9987
1,58	0,9429	1,94	0,9738	2,30	0,9893	2,66	0,9961	3,02	0,9987
1,59	0,9441	1,95	0,9744	2,31	0,9896	2,67	0,9962	3,03	0,9988
1,60	0,9452	1,96	0,9750	2,32	0,9898	2,68	0,9963	3,04	0,9988
1,61	0,9463	1,97	0,9756	2,33	0,9901	2,69	0,9964	3,05	0,9989
1,62	0,9474	1,98	0,9761	2,34	0,9904	2,70	0,9965	3,06	0,9989
1,63	0,9484	1,99	0,9767	2,35	0,9906	2,71	0,9966	3,07	0,9989
1,64	0,9495	2,00	0,9772	2,36	0,9909	2,72	0,9967	3,08	0,9990
1,65	0,9505	2,01	0,9778	2,37	0,9911	2,73	0,9968	3,09	0,9990
1,66	0,9515	2,02	0,9783	2,38	0,9913	2,74	0,9969	3,10	0,9990
1,67	0,9525	2,03	0,9788	2,39	0,9916	2,75	0,9970	3,11	0,9991
1,68	0,9535	2,04	0,9793	2,40	0,9918	2,76	0,9971	3,12	0,9991
1,69	0,9545	2,05	0,9798	2,41	0,9920	2,77	0,9972	3,13	0,9991
1,70	0,9554	2,06	0,9803	2,42	0,9922	2,78	0,9973	3,14	0,9992
1,71	0,9564	2,07	0,9808	2,43	0,9925	2,79	0,9974	3,15	0,9992
1,72	0,9573	2,08	0,9812	2,44	0,9927	2,80	0,9974	3,16	0,9992
1,73	0,9582	2,09	0,9817	2,45	0,9929	2,81	0,9975	3,17	0,9992
1,74	0,9591	2,10	0,9821	2,46	0,9931	2,82	0,9976	3,18	0,9993
1,75	0,9599	2,11	0,9826	2,47	0,9932	2,83	0,9977	3,19	0,9993
1,76	0,9608	2,12	0,9830	2,48	0,9934	2,84	0,9977	3,20	0,9993
1,77	0,9616	2,13	0,9834	2,49	0,9936	2,85	0,9978	3,21	0,9993
1,78	0,9625	2,14	0,9838	2,50	0,9938	2,86	0,9979	3,22	0,9994
1,79	0,9633	2,15	0,9842	2,51	0,9940	2,87	0,9979	3,23	0,9994
1,80	0,9641	2,16	0,9846	2,52	0,9941	2,88	0,9980	3,24	0,9994
1,81	0,9649	2,17	0,9850	2,53	0,9943	2,89	0,9981	3,25	0,9994
1,82	0,9656	2,18	0,9854	2,54	0,9945	2,90	0,9981	3,26	0,9994
1,83	0,9664	2,19	0,9857	2,55	0,9946	2,91	0,9982	3,27	0,9995
1,84	0,9671	2,20	0,9861	2,56	0,9948	2,92	0,9982	3,28	0,9995
1,85	0,9678	2,21	0,9864	2,57	0,9949	2,93	0,9983	3,29	0,9995
1,86	0,9686	2,22	0,9868	2,58	0,9951	2,94	0,9984	3,30	0,9995

Таблица 4. Квантили распределения Стьюдента $t_p(k)$ и Пирсона $\chi_p^2(k)$

k p	$t_p(k)$				k p	$\chi_p^2(k)$			
	0,05	0,025	0,975	0,05		0,05	0,025	0,975	0,05
1	12,71	5,02	0,00	3,84	32	2,04	49,48	18,29	46,19
2	4,30	7,38	0,05	5,99	34	2,03	51,97	19,81	48,60
3	3,18	9,35	0,22	7,81	36	2,03	54,44	21,34	51,00
4	2,78	11,14	0,48	9,49	38	2,02	56,90	22,88	53,38
5	2,57	12,83	0,83	11,07	40	2,02	59,34	24,43	55,76
6	2,45	14,45	1,24	12,59	42	2,02	61,78	26,00	58,12
7	2,36	16,01	1,69	14,07	44	2,02	64,20	27,57	60,48
8	2,31	17,53	2,18	15,51	46	2,01	66,62	29,16	62,83
9	2,26	19,02	2,70	16,92	48	2,01	69,02	30,75	65,17
10	2,23	20,48	3,25	18,31	50	2,01	71,42	32,36	67,50
11	2,20	21,92	3,82	19,68	52	2,01	73,81	33,97	69,83
12	2,18	23,34	4,40	21,03	54	2,00	76,19	35,59	72,15
13	2,16	24,74	5,01	22,36	56	2,00	78,57	37,21	74,47
14	2,14	26,12	5,63	23,68	58	2,00	80,94	38,84	76,78
15	2,13	27,49	6,26	25,00	60	2,00	83,30	40,48	79,08
16	2,12	28,85	6,91	26,30	65	2,00	89,18	44,60	84,82
17	2,11	30,19	7,56	27,59	70	1,99	95,02	48,76	90,53
18	2,10	31,53	8,23	28,87	75	1,99	100,84	52,94	96,22
19	2,09	32,85	8,91	30,14	80	1,99	106,63	57,15	101,88
20	2,09	34,17	9,59	31,41	85	1,99	112,39	61,39	107,52
21	2,08	35,48	10,28	32,67	90	1,99	118,14	65,65	113,15
22	2,07	36,78	10,98	33,92	95	1,99	123,86	69,92	118,75
23	2,07	38,08	11,69	35,17	100	1,98	129,56	74,22	124,34
24	2,06	39,36	12,40	36,42	105	1,98	135,25	78,54	129,92
25	2,06	40,65	13,12	37,65	110	1,98	140,92	82,87	135,48
26	2,06	41,92	13,84	38,89	115	1,98	146,57	87,21	141,03
27	2,05	43,19	14,57	40,11	120	1,98	152,21	91,57	146,57
28	2,05	44,46	15,31	41,34	125	1,98	157,84	95,95	152,09
29	2,05	45,72	16,05	42,56	130	1,98	163,45	100,33	157,61
30	2,04	46,98	16,79	43,77	∞	1,98	169,06	104,73	163,12

Таблица 6. Квантили распределения Фишера $F_{0,05}(k_1, k_2)$

k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93

k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	
k_2																			
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,9
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,79
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,77
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,75
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,73
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,71
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,70
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,58
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,95	1,87	1,78	1,74	1,69	1,63	1,58	1,51	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,35
∞	3,91	3,07	2,67	2,44	2,28	2,17	2,08	2,01	1,95	1,90	1,83	1,74	1,65	1,60	1,55	1,49	1,42	1,34	1,34

Список литературы

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М.: Высшая школа, 2007.
2. Андронов А.М., Копытов Е.А., Гринглаз Л.Я. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов.- СПб.: Питер, 2004.
3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов.- 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Юнити-Дана, 2004. — 573 с.
4. Попов А. Г., Данко П. Е., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч.: Ч. 2: Учебное пособие для вузов. М.: ОНИКС 2007 г.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2009.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. М.: Высшая школа, 2005.
7. Богатов Е.М., Мышанский В.А., Тамбыя Т.В. Лабораторный практикум по математической статистике в MS Excel с использованием интернет-ресурсов. – Старый Оскол, Изд-во «РОСА», 2012 г.
8. Балдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В. Основы теории вероятностей и математической статистики. Учебник - Москва: Флинта, 2010.- 488 с.
9. Гусева Е.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие - Москва: Флинта, 2011.- 220 с.