38. Уравнение A·X=B, $A=\begin{pmatrix} 10 & -10 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -9 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 33 & -150 \\ -27 & 21 \\ 68 & 75 \end{pmatrix}$.

39. Уравнение X·A=B, $A=\begin{pmatrix} -6 & 7 & -3 \\ -8 & 7 & -3 \\ 12 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 110 & 28 & 44 \\ -126 & -42 & -45 \end{pmatrix}$.

40. Уравнение X·A=B, $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ -7 & -12 & -11 \\ -7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -21 & -116 & -81 \\ 84 & 124 & 114 \end{pmatrix}$.

Задание 3. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. **2.** $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$. **3.** $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. **5.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **6.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **8.** $A=\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **9.** $A=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **11.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$. **12.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **14.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$. **15.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix} -6 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. **17.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$. **18.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ -2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix} -6 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 8 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **20.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **21.** $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. **23.** $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. **24.** $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **26.** $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. **27.** $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. **29.** $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. **30.** $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

31. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. **32.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$. **33.** $A=\begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

34. $A=\begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$. **35.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$. **36.** $A=\begin{pmatrix} -6 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

37. $A=\begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$. **38.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ -2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$. **39.** $A=\begin{pmatrix} -6 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 8 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

40. $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

линейного преобразования A в базисе $\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}$. Столбцами матрицы A являются коэффициенты разложения образов базисных векторов $A\overline{e_i}$ в том же базисе.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Пусть в линейном векторном пространстве действует линейное преобразование A.

Ненулевой вектор $\overline{x} \in V$ называется собственным вектором линейного преобразования A, если найдется такое число λ, что выполняется равенство: $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$.

Число λ называется *собственным значением линейного оператора A*, соответствующим данному собственному вектору $\overline{x}$.

Пусть задана матрица линейного преобразования A. Определитель $|A - \lambda E|$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A (это многочлен n - *ой* степени от λ).

Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ или в развернутом виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

называется *характеристическим уравнением* матрицы A. Корнями этого уравнения являются собственные значения преобразования A.

Таким образом, чтобы найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора A надо:

1) Составить характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$.
2) Найти все его корни λ_i. Это собственные значения линейного оператора.
3) Каждое из найденных λ_i подставить в систему линейных однородных уравнений $(A - \lambda E) \cdot X = 0$ и найти решение данной системы.

Найденные решения являются линейно – независимыми собственными векторами, отвечающими данным λ_i.

Пример17: Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение: Составим характеристическое уравнение и решим его.

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7 - \lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4 - \lambda) \cdot (-7 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) - 90 - 90 - 12(-7 - \lambda) + 27(4 - \lambda) + 25(4 - \lambda) = 0.$$

$$-(4 - \lambda)^2 (7 + \lambda) - 180 + 12(7 + \lambda) + 52(4 - \lambda) = 0.$$

Раскрывая все скобки и приводя подобные найдем: $-\lambda^3 + \lambda^2 = 0$ или $\lambda^2(-\lambda + 1) = 0.$

Откуда $\lambda_{1,\,2} = 0$, $\lambda_3 = 1$ – решения характеристического уравнения, которые являются собственными значениями оператора. Если $\lambda = 0$, то получим систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0. \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Приводя матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \cdot 5 - II \cdot 4 \\ \sim \\ I \cdot 3 - III \cdot 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{II - III} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$ получим эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ \qquad 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Выражая x_1 и x_2 через x_3 найдем:

$$x_2 = \frac{2}{3}x_3;\quad x_1 = \frac{5x_2 - 2x_3}{4} = \frac{\frac{10}{3}x_3 - 2x_3}{4} = \frac{\frac{4}{3}x_3}{4} = \frac{1}{3}x_3.$$

Обозначив переменную x_3 через t, получим общее решение системы: $\left(\frac{1}{3}t; \frac{2}{3}t; t\right) = t\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$.

Вектор $\bar{c} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$ является собственным вектором оператора A, отвечающим собственному решению $\lambda = 0$. Аналогичные рассуждения проводим и для другого собственного значения. При $\lambda = 1$ получим однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решим систему:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \underset{I\cdot 2 - III}{\overset{I\cdot 5 - II\cdot 3}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{II - III}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим эквивалентную систему уравнений: $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ \qquad -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$

Выразим x_1 и x_2 через x_3:

$$x_2 = x_3,$$

$$x_1 = \frac{5x_2 - 2x_3}{3} = \frac{5x_3 - 2x_3}{3} = \frac{3x_3}{3} = x_3.$$

Обозначим переменную x_3 через t, тогда общее решение системы $(t; t; t) = t\,(1; 1; 1)$.

Вектор $\bar{c}_2 = (1; 1; 1)$ – это собственный вектор линейного оператора A, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Ответ: $\lambda = 0,\ \bar{c}_1 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right);\ \lambda = 1,\ \bar{c}_2 = (1; 1; 1)$.