3 Комплексные числа: элементарные действия

3. 1 Основные формулы и определения

Алгебраическая форма комплексного числа: $z = x + iy$;
i- мнимая единица, $i^2 = -1$; x, y-вещественные числа,
$x = Re\, z$-действительная часть комплексного числа,
$y = Im\, z$- мнимая часть комплексного числа. Каждому комплексному числу z можно сопоставить точку на комплексной плоскости с осями координат $x = Re\, z, y = Im\, z$,
(см. рис.3.1)

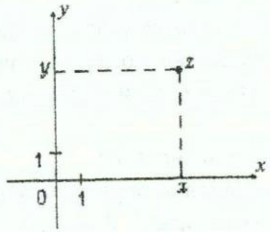

рис.3.1

Число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным числом по отношению к числу $z = x + iy$.

Тригонометрическая форма комплексного числа:
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r = |z|$ - модуль комплексного числа, φ- аргумент комплексного числа. Модуль и аргумент вычисляются по формулам: $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$. Показательная форма комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$. Если числа z_1, z_2 заданы в алгебраической форме $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, то справедливы формулы:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Для чисел z_1, z_2, заданных в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, справедливы формулы: $z_1z_2 = r_1[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$. r_2

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.
Эти же формулы можно записать для чисел в показательной форме: если $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, то $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.
Возведение в степень $n, n \in N$, числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (или $z = re^{i\varphi}$): $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ $\quad (z = r^ne^{in\varphi})$ (формула Муавра) .
Если число z задано в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то корень n-ой степени $(n \in N)$ из z имеет n различных значений, вычисляемых по формуле:
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, \ldots, n - 1.$

3. 2 Задачи

1. Вычислить сумму $z_1 + z_2$, разность $z_1 - z_2$, произведение $z_1 \cdot z_2$ и частное $\dfrac{z_1}{z_2}$ для чисел z_1, z_2, заданных в алгебраической форме

1. $z_1 = 2 + i;\ z_2 = -3 - 4i$	11. $z_1 = 3 - 3i;\ z_2 = 3 - i$
2. $z_1 = -2 + 3i;\ z_2 = 1 - i$	12. $z_1 = -3 + 3i;\ z_2 = 5i$
3. $z_1 = -1 + 3i;\ z_2 = 2 + 4i$	13. $z_1 = -4 - 2i;\ z_2 = 1 - i$
4. $z_1 = 1 - i;\ z_2 = -1 + i$	14. $z_1 = 5;\ z_2 = -2 + i$
5. $z_1 = 3 + 2i;\ z_2 = 2 - 3i$	15. $z_1 = 3 - i;\ z_2 = 2i$
6. $z_1 = -1 - 2i;\ z_2 = 3 + i$	16. $z_1 = -4 + 3i;\ z_2 = 3 - 4i$
7. $z_1 = 4 - i;\ z_2 = 1 + i$	17. $z_1 = 1 - 2i;\ z_2 = 2 + 3i$
8. $z_1 = 3 - 2i;\ z_2 = 2 - 2i$	18. $z_1 = -2 + i;\ z_2 = 5 - 3i$
9. $z_1 = -1 - i;\ z_2 = 3 - 2i$	19. $z_1 = 3i;\ z_2 = -1 - i$
10. $z_1 = 2i;\ z_2 = -1 + 2i$	20. $z_1 = 3 + 3i;\ z_2 = 2 - 2i$

2. Найти модули и аргументы комплексных чисел. Представить их в тригонометрической форме и изобразить на комплексной плоскости

1. $z = -2 + 2\sqrt{3}i$	8. $z = 4 + 3i$	15. $z = -1 - i\sqrt{3}$
2. $z = 4 - 3i$	9. $z = -7 - i$	16. $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
3. $z = -1 - i\sqrt{3}$	10. $z = 5 + 3i$	17. $z = 5 + 12i$
4. $z = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	11. $z = -\sqrt{3} + i$	18. $z = 2 + 5i$
5. $z = 2 - 5i$	12. $z = 1 + i\sqrt{3}$	19. $z = -\sqrt{3} - i$

6. $z = 2 - 2i$
7. $z = 1 - 3i$
13. $z = 1 + i$
14. $z = -1 - 2i$
20. $z = \sqrt{3} - i$

3. Найти произведение $z_1 \cdot z_2$ и частное $\dfrac{z_1}{z_2}$ для чисел z_1, z_2, записанных в тригонометрической форме

1. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$

2. $z_1 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\right)$; $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

3. $z_1 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{25} + i\sin\frac{3\pi}{25}\right)$; $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

4. $z_1 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$; $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

5. $z_1 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

6. $z_1 = 7\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

7. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$; $z_2 = \cos\frac{\pi}{25} + i\sin\frac{\pi}{25}$

8. $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$

9. $z_1 = 6\left(\cos\frac{4\pi}{25} + i\sin\frac{4\pi}{25}\right)$; $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

10. $z_1 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$; $z_2 = \cos\frac{2\pi}{25} + i\sin\frac{2\pi}{25}$

11. $z_1 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$; $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

12. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$; $z_2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{49} + i\sin\frac{2\pi}{49}\right)$

13. $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$; $z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

14. $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

15. $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$

16. $z_1 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$; $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

17. $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$; $z_2 = \cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}$

18. $z_1 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{7} + i\sin\frac{5\pi}{7}\right)$; $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

19. $z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{14} + i\sin\frac{3\pi}{14}\right)$; $z_2 = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$

20. $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

4. Вычислить число z^n (по формуле Муавра)

1. $z = 1 + i;\quad n = 5$
2. $z = -1 + i;\quad n = 3$
3. $z = 2 - 2i;\quad n = 4$
4. $z = \sqrt{3} - i;\quad n = 6$
5. $z = 1 + \sqrt{3}i;\quad n = 4$
6. $z = -3 - 3i;\quad n = 5$
7. $z = -2 + 2i;\quad n = 4$
8. $z = -2 - 2i;\quad n = 6$
9. $z = 2\sqrt{3} + 2i;\quad n = 3$
10. $z = -1 - i;\quad n = 5$
11. $z = 1 - i;\quad n = 4$
12. $z = -\sqrt{3} - i;\quad n = 3$
13. $z = -1 - \sqrt{3}i;\quad n = 4$
14. $z = 2 + 2i;\quad n = 6$
15. $z = \sqrt{3} + i;\quad n = 3$
16. $z = 2 + 2i;\quad n = 4$
17. $z = 2 + 2\sqrt{3}i;\quad n = 5$
18. $z = -\sqrt{3} + i;\quad n = 4$
19. $z = 1 - \sqrt{3}i;\quad n = 6$
20. $z = -1 + \sqrt{3}i;\quad n = 3$

5. Найти все значения корней

1. $\sqrt[4]{7-24i}$
2. $\sqrt[4]{-24-8i\sqrt{3}}$
3. $\sqrt[3]{-2+2i}$
4. $\sqrt[3]{8+i}$
5. $\sqrt[4]{2-2i}$
6. $\sqrt[4]{4+3i}$
7. $\sqrt[4]{-1-i}$
8. $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}$
9. $\sqrt[3]{-1+i}$
10. $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$
11. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}$
12. $\sqrt[3]{2+2i\sqrt{3}}$
13. $\sqrt[5]{1+i\sqrt{3}}$
14. $\sqrt[3]{2+i\sqrt{3}}$
15. $\sqrt[4]{-2-2i\sqrt{3}}$
16. $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$
17. $\sqrt[5]{-4+3i}$
18. $\sqrt[4]{4-3i}$
19. $\sqrt[3]{3+i\sqrt{3}}$
20. $\sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}}$

6. Найти действительные решения уравнений

1. $(4+2i)x+(5-3i)y=13+i$
2. $(3-3i)x+(2+4i)y=12-2i$
3. $(1+2i)x+(3-2i)y=11+i$
4. $(1-5i)x+(2+3i)y=3+2i$
5. $(4-3i)x+(1-2i)y=7+4i$
6. $(1-2i)x+(3+4i)y=5-3i$
7. $(5+7i)x+(2-3i)y=14+5i$
8. $(3+4i)x+(3+5i)y=10-2i$
9. $(5-2i)x+(4-7i)y=11+3i$
10. $(1-4i)x+(2+3i)y=9+4i$
11. $(2-i)x+(5-4i)y=15-2i$
12. $(3+5i)x+(2+6i)y=8-7i$
13. $(4-7i)x+(1-2i)y=9+6i$
14. $(3-2i)x+(2+4i)y=14-2i$
15. $(1+3i)x+(3-5i)y=10+3i$
16. $(2-3i)x+(4+2i)y=9-4i$
17. $(3-2i)x+(1-2i)y=6+2i$
18. $(1-i)x+(2-3i)y=4-7i$

19. $(2+3i)x+(3-4i)y=5-6i$
20. $(3-i)x+(2+3i)y=7+4i$

7. Решить систему линейных уравнений

1. $\begin{cases} z_1+2z_2=1+i \\ 3z_1+iz_2=2-3i \end{cases}$
2. $\begin{cases} z_1+z_2=2+i \\ iz_1-2z_2=1-3i \end{cases}$
3. $\begin{cases} iz_1-z_2=3+i \\ z_1+3z_2=2-i \end{cases}$
4. $\begin{cases} z_1-3z_2=3-i \\ iz_1+z_2=3+4i \end{cases}$
5. $\begin{cases} z_1+3z_2=2-2i \\ iz_1-z_2=1+3i \end{cases}$
6. $\begin{cases} z_1+iz_2=2+i \\ z_1+2z_2=3-2i \end{cases}$
7. $\begin{cases} z_1+2iz_2=3-i \\ z_1+3z_2=1+2i \end{cases}$
8. $\begin{cases} z_1-z_2=2-3i \\ -iz_1+2z_2=3+i \end{cases}$
9. $\begin{cases} z_1-iz_2=-3+i \\ 2z_1+3z_2=-i \end{cases}$
10. $\begin{cases} z_1-iz_2=2-3i \\ z_1+2z_2=-2+i \end{cases}$
11. $\begin{cases} z_1-2z_2=1-i \\ 2z_1-iz_2=1+2i \end{cases}$
12. $\begin{cases} z_1+iz_2=2-i \\ z_1+2z_2=3+2i \end{cases}$
13. $\begin{cases} z_1+2iz_2=-1-i \\ 2z_1-z_2=2+3i \end{cases}$
14. $\begin{cases} 2z_1+iz_2=-1-i \\ z_1-2z_2=-2+3i \end{cases}$
15. $\begin{cases} iz_1-3z_2=5+2i \\ 2z_1+z_2=1-i \end{cases}$
16. $\begin{cases} z_1-2z_2=2+2i \\ z_1-iz_2=\frac{1}{2}+i \end{cases}$
17. $\begin{cases} z_1-iz_2=-1+2i \\ 2z_1+z_2=3+4i \end{cases}$
18. $\begin{cases} z_1+2iz_2=-1-3i \\ 2z_1-z_2=3-4i \end{cases}$
19. $\begin{cases} z_1-3z_2=1-2i \\ z_1+iz_2=-1-i \end{cases}$
20. $\begin{cases} z_1+3z_2=1 \\ iz_1+2z_2=1-\frac{1}{2}i \end{cases}$

3. 3 Решение типовых примеров

Пример 3.1.

Вычислить z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=5-i$, $z_2=-1-2i$.

Решение:

$z_1+z_2=5-i+(-1-2i)=5-i-1-2i=4-3i$;
$z_1-z_2=5-i-(-1-2i)=5-i+1+2i=6+i$;
$z_1\cdot z_2=(5-i)(-1-i)=5\cdot(-1)-i\cdot(-1)-5\cdot i+i^2=$
$=-5+i-5i-1=-6-4i$;
$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-i}{-1-2i}=\frac{(5-i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)}=\frac{-5+i+10i-2i^2}{(-1)^2+(-2)^2}=$