Старооскольский технологический институт им. А.А.Угарова
(филиал) Федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего профессионального
образования «Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»

кафедра высшей математики

В.П.Архипов, Р.Р.Мухин

МАТЕМАТИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для студентов
очной и заочной форм обучения

Одобрено редакционно-издательским советом СТИ НИТУ МИСиС для студентов направлений подготовки бакалавров 140100, 140400, 150400, 151000, 151900, 190600, 220400, 220700, 221700, 230100, 230400, 230700, 270800, 280700, 221400, 222000

СТАРЫЙ ОСКОЛ 2014

УДК 51

ББК 22. 1.73

Рецензент: кандидат технических наук, доцент Казьмин А.В..

Архипов В.П., Мухин Р.Р. Математика. Дифференциальные уравнения. Операционное исчисление. Учебное пособие. Издание второе, переработанное – Ст. Оскол: СТИ НИТУ МИСиС, 2014. – 52 с.

Учебное пособие предназначено для студентов технических направлений по программе подготовки бакалавров. Содержит краткие теоретические сведения по разделам учебного курса «Математика»: комплексные числа, дифференциальные уравнения, операционное исчисление. В пособии приведено большое количество примеров с подробным описанием решения, даны варианты домашних заданий и примеры их выполнения.

Пособие может быть использовано студентами дневной и заочной форм обучения для подготовки к практическим занятиям, контрольным работам, зачетам и экзаменам по курсу.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Методические рекомендации к курсу

В основе очень большого числа математических моделей, описывающих реальные физические процессы, лежат соотношения, связывающие физические величины и скорости их изменения – дифференциальные уравнения. В рамках учебного курса Математика для бакалавров предусмотрено лишь знакомство с этим понятием и основными свойствами их решений. В настоящем учебном пособии представлены простейшие виды дифференциальных уравнений первого порядка (допускающие конечное интегрирование) и линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Разобраны основные методы их решений. Существенную роль при этом играют комплексные числа – новые математические объекты, являющиеся дальнейшим развитием понятия действительного числа, распространяющие числа с числовой прямой на полную «комплексную» плоскость. Изложение учебного материала в пособии начинается с рассмотрения комплексных чисел, их свойств, геометрической интерпретации и основных алгебраических операций над ними. Далее вводится понятие дифференциального уравнения и даётся определение его решения, как некоторой функции, после подстановки в уравнение, обращающей его в тождество. Нахождение такой функции возвращает к понятию интегрирования – определению первообразной (неопределенного интеграла). Для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами существенно используются комплексные числа и специальное преобразование функций – преобразование Лапласа. Правила и методы вычисления образа и прообраза в этом преобразовании и есть «операционное исчисление». Операционное исчисление позволяет свести решение начальных задач для дифференциальных уравнений к решению алгебраических уравнений и широко используется в прикладных вопросах электротехники и оптимального управления.

Эффективное усвоение материала пособия возможно лишь при последовательном переходе от темы к теме, позволяющем видеть связь различных понятий и их взаимное влияние. Приведенных сведений и примеров достаточно для выполнения заданий по курсу, однако для более полного и качественного понимания необходимо изучение серьёзной учебной литературы, частично указанной в представленном в пособии списке литературы.

2. Комплексные числа. Основные определения и действия над ними

Комплексным числом z называется число вида $z=(x,\ y)=x+iy$, где x и y - действительные числа, а i = √-1 – *мнимая единица,* т.е. число, квадрат которого равен -1, $i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x=\operatorname{Re}z$, а y - мнимой частью z, обозначается $y=\operatorname{Im}z$.

Приведенная запись называется ***алгебраической формой*** комплексного числа: $z=(x,\ y)=x+iy$.

Операции сложения и умножения комплексных чисел подчиняются всем законам классической арифметики:

$z_1+z_2=z_2+z_1$, $\quad z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$,

$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$ и др.

При этом, вычисления проводятся как в обычной алгебре с учетом простого ***свойства мнимой единицы***: $i^2=-1$.

Комплексное число $x-iy$ называется комплексно сопряженным к числу $z=x+iy$ и обозначается

$$\bar{z}=(x,-y)=x-iy.$$

Произведение $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ - всегда неотрицательное действительное число.

Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Дадим определения ***действий*** с комплексными числами, заданными в алгебраической форме и их ***геометрическую интерпретацию***.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. **Суммой** $z_1 + z_2$ чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \qquad (1)$$

2. **Разностью** $z_1 - z_2$ чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \qquad (2)$$

3. **Произведением** $z_1 \cdot z_2$ чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad (3)$$

Действительно, с учетом ***свойства мнимой единицы*** ($i^2 = -1$):

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + \\ + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

.

4. **Деление** комплексных чисел осуществляется с помощью комплексно сопряженных чисел. Например, для вычисления частного двух комплексных чисел умножим и разделим дробь на число, комплексно сопряженное к знаменателю $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2,\ z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2 - i^2y_1y_2 + ix_2y_1 - ix_1y_2}{x_2^2 - i^2y_2^2 + ix_2y_2 - ix_2y_2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Частным от деления комплексного чисел z_1 на z_2 (при $z_2 \neq 0$) называется комплексное число, вычисленное по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Примеры 1-4: Пусть $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 3 + 4i$.

Тогда

$z_1 + z_2 = 2 - 3i + 3 + 4i = 5 + i,$

$z_1 - z_2 = 2 - 3i - 3 - 4i = -1 - 7i,$

$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)(3 + 4i) = 6 - 9i + 8i - 12i^2 =$

$= 6 + 12 - i = 18 - i\ .\ (i^2 = -1)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{3 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{6 - 9i - 8i + 12i^2}{9 - 16i^2} =$$

$$= \frac{6 - 17i - 12}{9 + 16} = \frac{-6 - 17i}{25} = -\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i.$$

Геометрическая интерпретация комплексного числа

Зададим на плоскости прямоугольную систему координат. Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой плоскости с координатами (x, y). Действительные числа изображаются точками на оси абсцисс, а чисто мнимые – точками на оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется **действительной осью**, а ось ординат – **мнимой осью**. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется **комплексной плоскостью.**

Комплексное число z изображается так же вектором с началом в точке 0 (рис. 1) и вектор, изображающий комплексное число z, обозначается той же буквой z.

С помощью векторов наглядно можно показать сложение и вычитание комплексных чисел. Из формулы (1) вытекает, что число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по обычному правилу сложения векторов (Рис. 2).

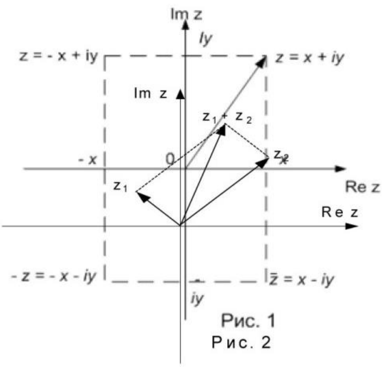

Рис. 1
Рис. 2

Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяются не только декартовыми координатами $x,\ y$, но и полярными координатами r, φ (Рис. 3), где $r = |z|$ - расстояние от точки 0 до точки z, называемое **модулем** комплексного числа z, а φ – угол, между действительной осью и вектором z, отсчитываемый от положительного направления действительной оси. При этом, если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке – отрицательной. Этот угол φ называется **аргументом** комплексного числа z, и обозначается $\varphi = \arg z$. Из Рис. 3 видно, что

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. (5)

Любое комплексное число можно представить в алгебраической $z = x + iy$ или в ***тригонометрической форме*** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. (6)

Из Рис. 3 видно, что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, тогда из формул (5) вытекает, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} . \qquad (7)$$

Из (7) вытекает, что аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$ удовлетворяет соотношению:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} . \qquad (8)$$

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно: если φ_0 - одно из значений аргумента комплексного числа z, то все значения аргумента этого числа находятся по формуле

$$\varphi = \arg z = \varphi_0 + 2k\pi\ ,\ k = 0, \pm 1, \pm 2,\ \dots \qquad (9)$$

Пример 5. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 - i$.

Здесь $x = -1, \quad y = -1$. Тогда:

$$|-1 - i| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Так как точка $z = -1 - i$ лежит в третьей четверти и $\operatorname{tg} \varphi = 1$, то $\arg(-1 - i) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией дается ***формулой Эйлера***

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\ .$$

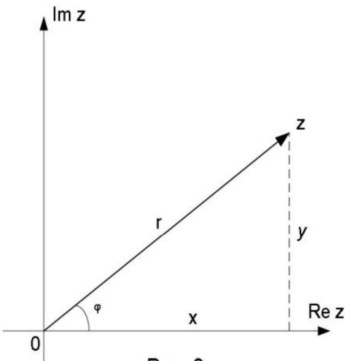

Рис. 3

Тогда

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\, e^{i\varphi}$$

- ***показательная форма*** комплексного числа.

Очень полезной является ***формула Муавра***, позволяющая возводить комплексное число в произвольную степень:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (11)$$

В показательной и тригонометрической форме легко выполняются действия умножения и деления комплексных чисел. Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} =$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) . \qquad (12)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) .$$

Пример 6. Комплексные числа $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ и $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ представить в показательной (тригонометрической) форме. Найти их произведение и частное.

Представим z_1 в следующем виде (тригонометрическом):

$z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, где $r_1 = 2$,

$\cos\varphi_1 = -\frac{1}{2}$, $\sin\varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поскольку точка z_1 лежит в третьей четверти, то $\varphi_1 = \frac{4\pi}{3}$ (без учета периода 2π).

И $z_1 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Точно так же:

$z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, где

$r_2 = 2$, $\cos\varphi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$,

$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

По формулам (12) теперь получаем:

$z_1 \cdot z_2 = 4\, e^{i\frac{4}{3}\pi} e^{i\frac{3}{4}\pi} = 4e^{i(\frac{4}{3} + \frac{3}{4})\pi} = 4\, e^{i\frac{25}{12}\pi} =$

$$= 4\,e^{i(\frac{\pi}{12}+2\pi)} = 4\,e^{i\frac{\pi}{12}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{4}{3}\pi}}{2e^{i\frac{3}{4}\pi}} = e^{i(\frac{4}{3}-\frac{3}{4})\pi} = e^{i\frac{7\pi}{12}} = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\ .$$

Формула Муавра (11) позволяет получить ***формулу*** для извлечения ***корня произвольной степени*** из любого комплексного числа. Для любого комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,e^{i\varphi}$ существует ровно n различных комплексных чисел $z_k,\ k = 0,1,2,\ldots,n-1$, дающих значение $\sqrt[n]{z}$, т.е. таких, что $z_k^n = z$. При этом все z_k вычисляются по формулам:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\cdot(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}) = \qquad (13)$$

$$= \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}.$$

Пример 7. Найти все значения $\sqrt[3]{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$.

Здесь $z = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, n=3. Как и в примере 6, представим z в показательной (тригонометрической) форме: $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Из формулы (13) получим:

$$z_k=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right), \text{ при } k=0,1,2\ .$$

При $k=0$: $\quad z_0=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=$

$=\sqrt[3]{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})$;

при $k=1$: $\quad z_1=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12})=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}=$

$=\sqrt[3]{2}(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$;

при $k=2$: $\quad z_2=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12})=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}=$

$=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12})$.

Замечание. 1. Проверьте самостоятельно, что все полученные числа действительно являются корнями третьей степени из заданного комплексного числа.

2. Покажите, что $\sqrt[3]{1}$ имеет три различных значения:

$1,\quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

3. Дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением называется выражение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и её производные y', y'',… $y^{(n)}$

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 . \tag{14}$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящий в уравнение.

Решением или **интегралом** уравнения (14) называется любая функция $y = y(x)$, обращающая его в тождество.

Уравнение $$a y' + by = 0 \tag{15}$$

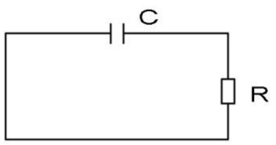

Рис. 4

является уравнением первого порядка.

Уравнением типа (15) можно описать свободные колебания в механических системах или электрических цепях:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \ .$$

Уравнение второго порядка

$$y'' + py' + q = 0 \tag{16}$$

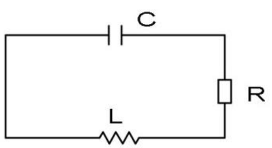

Рис. 5

описывает разряд конденсатора в электрической цепи:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0. \quad (17)$$

Пример 8. Решением уравнения (15) является функция

$$y(x) = Ce^{-\frac{bx}{a}} \quad , \qquad (15a)$$

где C - произвольная постоянная величина. Найдем производную $y'(x) = -C\frac{b}{a}e^{-\frac{bx}{a}}$ и подставим её в уравнение (15). Получаем: $-\alpha Ce^{-\alpha x} \pm \alpha Ce^{-\alpha x} = 0$ при $\alpha = \frac{b}{a}$, т. е. $y(x) = Ce^{-\frac{bx}{a}}$ действительно является решением уравнения (15).

Пример 9. Решением уравнения второго порядка

$$y'' + 3y' - 4y = 0 \qquad (18)$$

является функция

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{x} , \qquad (18a)$$

где C_1 и C_2 являются двумя произвольными постоянными. Проверим, что эта функция является решением уравнения (18). Найдём первую и вторую производную зтой функции:

$y'(x) = -4C_1e^{-4x} + C_2e^{x}$, $y''(x) = 16C_1e^{-4x} + C_2e^{x}$.

Зти производные и саму функцию $y(x)$ подставим в уравнение (18). Получим:

$$16C_1e^{-4x} + C_2e^{x} - 12C_1e^{-4x} +$$
$$+3C_2e^{x} - 4C_1e^{-4x} - 4C_2e^{x} =$$
$$= 16C_1e^{-4x} - 16C_1e^{-4x} + 4C_2e^{x} - 4C_2e^{x} = 0.$$

Функция $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x$ действительно является решением уравнения (18) для любых C_1 и C_2.

Мы видим, что решений у уравнений (15) и (18) из-за того, что туда входят постоянные C (они могут быть любыми числами) бесконечно много.

Такие решения $y = \varphi(x, C)$ или $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ называются **общими решениями** дифференциального уравнения.

Если в решении $y(x) = Ce^{-\frac{bx}{a}}$ уравнения (15) произвольной постоянной C придать определённое значение $C = C_0$, то в этом случае получаем частное решение $y(x) = C_0e^{-\frac{bx}{a}}$. Частное решение можно получить, если наряду с самим уравнением задаётся ещё дополнительное (начальное) условие.

Например, для уравнения (15) дано начальное условие

$$y(0) = \frac{1}{2}$$

Тогда подставляем это условие в общее решение (15а) $y(x) = Ce^{-\frac{bx}{a}}, y(0) = C = \frac{1}{2}$, значит значение $C_0 = \frac{1}{2}$, а частное решение уравнения (15) с начальным условием (19) будет следующим: $y(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{bx}{a}}$.

В дальнеёшем будем рассматривать только уравнения первого порядка, разрешеные относительно производной, т. е. $y' = f(x,\ y)$ или, учитывая, что $\frac{dy}{dx} = y'$, $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

В домашнем задании требуется уметь решать уравнения первого порядка двух типов: уравнения с разделяющимися переменными и линейные уравнения.

Уравнения с **разделяющимися переменными** имеют следующий вид:

$y' = f(x)\varphi(y)$или $P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$.

Для решения таких уравнений мы «разделяем переменные», т. е. при помощи умножения и деления приводим уравнение к такой форме, чтобы в одну часть входила только функция от x и дифференциал dx, а в другую часть – функция от y и dy. В первом случае мы получим:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx.$$

Теперь мы можем проитегрировать левую часть по y, а правую по x. Получим(вычисляя интегралы) ответ:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C\ ,$$

где C - произвольная постоянная.

Пример 10. Решить уравнение:

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0.$$

Разделяем переменные. Для этого делим обе части уравнения на $(y^2 - 1)(x^2 - 1)$. Получаем:

$\frac{xdx}{x^2-1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0$ или $\int\frac{xdx}{x^2-1}+\int\frac{ydy}{y^2-1}=\int 0dx$.

После интегрирования имеем

$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=2\ln|C|$ или

$\ln|(x^2-1)(y^2-1)|=\ln C^2$. Убираем логарифмы (потенциируем) и модуль: $(x^2-1)(y^2-1)=\tilde{C}$,

$\tilde{C}=\pm C^2$ (для простоты записи окончательного результата было удобно записать постоянную интегрирования в правой части в виде $\ln|C|$).

Линейным уравнением **первого порядка** называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производной вида

$$y'+Py=Q, \tag{20}$$

где P, Q – заданные функцией от x.

Общее решение линейного уравнения (20) дается следующим выражением

$$y(x)=e^{-\int Pdx}\left(C+\int Qe^{\int Pdx}dx\right), \tag{21}$$

где C – произвольная постоянная. Как видно, для нахождения решения надо взять два интеграла.

Пример 11. Найти общее решение уравнения

$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+3)^3$ и его частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=4$.

Здесь $P(x)=-\frac{2}{x+1}$, $Q(x)=(x+1)^3$.

Воспользуемся формулой (21):

$$\int P d\,x = -2\int \frac{dx}{x+1} = -\,2\ \ln|x+1| = -\ln(x+1)^2,$$

$$e^{-\int P dx} = e^{\ln(x+1)^2} = (x+1)^2,$$

$$e^{\int P dx} = e^{-\ln(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

$$\int Q e^{\int P dx} dx = \int (x+1)^3 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int (x+1) dx =$$
$$= \int (x+1) d(x+1) = \frac{(x+1)^2}{2}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(x) = (x+1)^2\left(C + \frac{(x+1)^2}{2}\right) =$$
$$= \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

При $x = 1$ имеем $\frac{(1+1)^4}{2} + C(1+1)^2 = 4$ или $8+4C = 4$, $C = -1$. Таким образом, нужное частное решение имеет вид: $y(x) = \frac{(x+1)^4}{2} - (x+1)^2$.

4. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянным коэффициентом имеют вид:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \qquad (22)$$

где a_1, a_2 - постоянные величины, а $f(x)$ - заданная функция. Если функция, стоящая в правой части уравнения $f(x) = 0$, то уравнение называется ***однородным***

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad . \qquad (23)$$

Как показано в Примерах 8-11, дифференциальное уравнение может иметь бесконечное множество решений. Свойства линейных дифференциальных уравнений дают достаточно простой алгоритм их нахождения.

Правило 1. Общее решение неоднородного уравнения (22) $y(x)$ состоит из суммы двух членов:

1) общего решения однородного уравнения (23) $y = Y(x)$

и

2) некоторого «частного» решения $y = y_ч(x)$ неоднородного уравнения (22).

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (22) имеет вид:

$$y = y(x) = Y(x) + y_ч(x). \qquad (24)$$

Для получения функции $y = y(x)$ в (24) необходимо выполнить следующие шаги: 1) найти $y = Y(x)$, 2) найти $y = y_ч(x)$, 3) найти их сумму.

Правило 2. Общее решение однородного уравнения (23) $y = Y(x)$ равно сумме двух некоторых его линейно независимых решений $y = y_{1,2}(x)$, взятых с произвольными коэффициентами:

$$y = Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (25)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.
(Функции $y = y_{1,2}(x)$ являются линейно независимыми на отрезке $[a; b]$, если их отношение не является постоянным на этом отрезке, т.е. $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$ при $a \leq x \leq b$)

Если коэффициенты уравнения (23) являются постоянными, то соответствующие линейно независимые решения однородного уравнения (функции $y = y_{1,2}(x)$) определяются по следующему простому правилу.

Правило 3. Квадратное (алгебраическое) уравнение

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \qquad (26)$$

называется **характеристическим уравнением** уравнения (23). Если k_1 и k_2 - корни характеристического уравнения, то функции $y_{1,2}(x) = e^{k_{1,2}x}$ определяют частные решения уравнения (23). (Это легко проверить на примерах)
Здесь возможны три разных случая в зависимости от корней характеристического уравнения (26).
1) $D = a_1^2 - 4a_2 > 0$, $k_1 \neq k_2$ корни характеристического уравнения действительные и различные. Тогда $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ и общее решение уравнения (23) имеет вид

$$y = Y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad . \qquad (27)$$

2) $D = a_1^2 - 4a_2 = 0$, $k_1 = k_2$ корни характеристического уравнения действительные и равные. Тогда $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = xe^{k_1 x}$ и общее решение уравнения (23) имеет вид

$$y = Y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} \quad . \qquad (28)$$

3) $D = a_1^2 - 4a_2 < 0$, $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$ корни характеристического уравнения комплексные числа. Тогда $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ и общее решение уравнения (23) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \ . \qquad (29)$$

(Напомним, что решения квадратного уравнения $at^2 + bt + c = 0$ даются формулой

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) \qquad (30)$$

Пример 12. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 7y' + 6y = 0 \ .$$

Запишем характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 6 = 0$. По формуле (30) находим его корни k_1 и k_2.

$$k_1, \ k_2 = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 6}}{2} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = 1, \ 6.$$

Тогда $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{6x}$. Общее решение уравнения будет иметь вид $y = Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

Пример 13. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + y = 0 \ .$$

Запишем характеристическое уравнение

$k^2 + 2k + 1 = 0$. По формуле (30) находим его корни k_1 и k_2: $k_1 = k_2 = -1$. Тогда $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$. Общее решение уравнения будет иметь вид

$y = Y(x) = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$.

Пример 14. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 13\, y = 0\,. \qquad (31)$$

Запишем характеристическое уравнение

$k^2 + 4k + 13 = 0$. По формуле (30) находим его корни

k_1 и k_2: $k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-52}}{2} =$

$= \dfrac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = \dfrac{-4 \pm 6i}{2} =$

$= -2 \pm 3i = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha = -2, \quad \beta = 3$.

$y_1 = e^{-2x}\cos 3x\,, \quad y_2 = e^{-2x}\sin 3x$.

Подставляя в формулу (29) получим общее решение уравнения (31).

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Научившись решать однородные уравнения (23), теперь перейдем к нахождению частного решения уравнения (22). Существует общий метод построения таких решений – метод вариации произвольных постоянных. Мы ограничимся здесь рассмотрением другого метода – метода подбора неопределенных коэффициентов, позволяющем для некоторых специальных видов правой части уравнения (22) находить частное решение $y = y_ч(x)$.

Пусть $f(x) = e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]$.

Такой вид правой части имеет большое значение в прикладных задачах. (Например, уравнение вынужденных колебаний заряда $q(t)$ для цепи на рис. 5 будет иметь следующий вид $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E_0\cos\omega t$)

Правило 4. Если неоднородное уравнения (22) имеет специальный вид

$y'' + a_1y' + a_2y = e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]$, (32)

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены каких-то степеней;

то его частное решение $y = y_ч(x)$ следует искать в виде

а) $y_ч = e^{ax}[U(x)\cos bx + V(x)\sin bx]$, (33)

где $U(x)$ и $V(x)$ – многочлены, коэффициенты которых нам неизвестны, а степени равны наибольшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, ***если комплексное число***

$$\boldsymbol{\omega = a + ib \neq k_{1,2}},$$

где $\boldsymbol{k_{1,2}}$ ***– корни характеристического уравнения (26);***

б) $y_ч = x^p e^{ax}[U(x)\cos bx + V(x)\sin bx]$, (34)

где $U(x)$ и $V(x)$ – многочлены, коэффициенты которых нам неизвестны, а степени равны наибольшей из степеней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, ***если комплексное число*** $\boldsymbol{\omega = a + ib = k_{1,2}}$ ***, где*** $\boldsymbol{k_{1,2}}$ ***– корни***

характеристического уравнения (26) и $p = 1$ ***при*** $\boldsymbol{k_1 \neq k_2}$ ***и*** $p = 2$ ***при*** $\boldsymbol{b = 0}$ **и** $\boldsymbol{k_1 = k_2}$ **.**

Покажем реализацию этих правил на примерах.

Пример 15. Найти частное решение уравнения

$y'' + 4y = \sin 3x\,,$ (35)

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, y'(0) = 0\,. \qquad (36)$$

Построим вначале общее решение уравнения (35). По Правилу 1 оно имеет вид $y(x) = Y(x) + y_ч(x)$. (24)

Находим общее решение однородного уравнения $Y(x)$. Запишем характеристическое уравнение однородного уравнения $y'' + 4y = 0$: $k^2 + 4 = 0$. Его корни $k_1, \; k_2 = \pm 2i, \alpha = 0, \beta = 2$. Следуя Правилу 3 получаем:

$$Y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\,. \qquad (37)$$

Для построения $y_ч(x)$ воспользуемся Правилом 4. Правая часть уравнения (35) имеет вид: $f(x) = \sin 3x$. Сравнивая её с правой частью в (32):

$f(x) = e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx] = \sin 3x\,,$

получим $a = 0, b = 3$ ($e^{ax} = 1,\; P(x) = 0,\; Q(x) = 1$ - многочлены нулевой степени). Составим из этих параметров величину $\omega = a + ib = 0 + 3i \neq \pm 2i = k_{1,2}$.

Таким образом, может быть применена часть а) Правила 4: частное решение $y_ч(x)$ уравнения (35) ищем в виде

$$y_ч(x) = A\cos 3x + B\sin 3x, \qquad (38)$$

где $U(x) = A$ и $V(x) = B$ – многочлены «нулевой» степени с произвольными коэффициентами A и B, которые необходимо подобрать так, чтобы функция (38) удовлетворяла уравнению (35).

Найдем производные функции (38):

$y'_ч(x) = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$

$$y''_ч(x) = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

И вместе с $y_ч(x)$ подставим их в левую часть уравнения (35). Получим

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 4A\cos 3x + 4B\sin 3x = \sin 3x.$$

После простых преобразований имеем

$$-5A\cos 3x - 5B\sin 3x = \sin 3x.$$

Поскольку $\cos 3x$ и $\sin 3x$ между собой линейно независимы, тождественное равенство может выполняться только при равенстве коэффициентов перед этими функциями слева и справа. Получаем:

$-5A = 0, \quad -5B = 1, \;\; A = 0, \;\; B = -\frac{1}{5}$.

Частное решение (38) будет иметь вид

$$y_ч(x) = -\frac{1}{5}\sin 3x\ .$$

Теперь можно выписать общее решение уравнения (35):

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x. \qquad (39)$$

Для того, чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (36), подставим функцию (39) в условия (36) и выберем постоянные C_1, C_2 так, чтобы эти условия выполнялись. Найдём производную функции (39).

$$y'(x) = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x)' =$$
$$= -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - \frac{3}{5}\cos 3x \ .$$

Из (36) получаем: $y(0) = C_1 = 1$ ($\cos 0$=1, $\sin 0 = 0$)

и $y'(0) = 2C_2 - \frac{3}{5} = 0, \ \ C_2 = \frac{3}{10}$.

Следовательно, частным решением уравнения (35) с данными начальными условиями (36) будет функция

$$y(x) = \cos 2x + \frac{3}{10}\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x$$

Пример 16. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), \tag{41}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 2, y'(0) = 2\ . \tag{42}$$

Решение строится по той же схеме, что и в предыдущем примере. Находим общее решение однородного уравнения: характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$, его корни $k_1 = 0, k_2 = 2$ ($\alpha = 0$ или $\alpha = 2$). Таким образом, общее решение однородного уравнения равно

$$Y(x) = C_1 + C_2 e^{2x}. \tag{43}$$

Определяем $y_ч(x)$ пользуясь Правилом 4. Правая часть уравнения (41) имеет вид: $f(x) = e^x(x^2 + x - 3)$. Сравнивая её с правой частью в (32):

$f(x) = e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx] =$

$= e^x(x^2 + x - 3)$,

получим $a = 1, \ b = 0$, $P(x) = x^2 + x - 3, \ Q(x) = 0$ - многочлены второй и нулевой степени. Составим из этих параметров величину $\omega = a + ib = 1 \neq \alpha = k_{1,2}$. Следовательно, может быть применена часть а) Правила 4: частное решение $y_ч(x)$ уравнения (41) ищем в виде

$$y_ч(x) = e^x(Ax^2 + Bx + C),. \qquad (44)$$

где $U(x) = Ax^2 + Bx + C$ и $V(x) = 0$ – многочлены с произвольными коэффициентами A, B и C.

Далее вычисляем производные $y_ч(x)$ и подставляя их в уравнение (41) определяем A, B и C.

$y'_ч(x) = e^x(Ax^2 + Bx + C) + e^x(2Ax + B) =$
$= e^x[Ax^2 + (2A + B)x + (B + C)]$,
$y''_ч(x) = e^x[Ax^2 + (2A + B)x + (B + C)] +$
$+e^x[2Ax + (2A + B)] =$
$= e^x[Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B + C)]$.

Подставляем $y'_ч(x)$ и $y''_ч(x)$ в левую часть уравнения (41):

$e^x[Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B + C)] -$
$-2e^x[Ax^2 + (2A + B)x + (B + C)] = e^x(x^2 + x - 3)$.

Разделив на e^x, после простых преобразований, получим:

$[Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B + C)] + [-2Ax^2 +$
$+(-4A - 2B)x + (-2B - 2C)] = x^2 + x - 3$,
$(A - 2A)x^2 + (4A + B - 4A - 2B)x + (2A + 2B + C -$
$-2B - 2C) = x^2 + x - 3$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $-A = 1, -B = 1, 2A - C = -3$ находим

$$A = -1, B = -1,\ C = 1\,.$$

Таким образом: $y_ч(x) = (-x^2 - x + 1)e^x$.

Общее решение уравнения (41) будет следующим

$$y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + (-x^2 - x + 1)e^x \ . \qquad (45)$$

Остается найти частное решение, удовлетворяющее условиям $y(0) = 2, \ y'(0) = 2$, т.е. нужно определить значение постоянных C_1 и C_2 так, чтобы для функции в (45) выполнялись условия (42). Найдём из (45) производную $y'(x)$

$y'(x) = 2C_2e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) + e^x(-2x - 1) =$
$= 2C_2e^{2x} + e^x(-x^2 - 3x)$. Тогда $y'(0) = 2C_2 = 2$ и $y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 2$. То есть, $C_2 = 1, C_1 = 0$.

Окончательно, частное решение начальной задачи (41)-(42) будет равно: $y(x) = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1)$.

5. Операционное исчисление. Применение к решению задачи Коши

Со специальным методом преобразования функций **операционным исчислением** связан другой, довольно простой, метод решения линейных дифференциальных уравнений. Идея его применения заключается в том, что над дифференциальным уравнением совершается некоторое преобразование (преобразование Лапласа), в результате которого оно переходит в алгебраическое уравнение. Решается алгебраическое уравнение, затем к этому решению применяется обратное преобразование и тем самым находится искомое решение дифференциального уравнения. Операционное исчисление особенно удобно при решения задач электротехники и электроники.

Основные понятия операционного исчисления.

Изображением (преобразованием по Лапласу, образом) произвольной функции действительной переменной $f(x)$ называется функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + it \ (s > 0)$, которая определяется соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx \,. \qquad (46)$$

Функция $f(x)$, к которой применяется преобразование Лапласа, называется **оригиналом**. Для применимости используемых методов оригинал $f(x)$ должен удовлетворять ряду требований, которые обычно выполняются в задачах физики и техники.

То, что функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(x)$, символически записывается так

$$F(p) \risingdotseq f(x).$$

Отметим некоторые свойства оригинала и изображения:

1) ***Свойство линейности.***

Если $F(p) \risingdotseq f(x)$, $F_1(p) \risingdotseq f_1(x)$, $F_2(p) \risingdotseq f_2(x)$ и

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x),$$

то
$$F(p) = C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)\,, \qquad (47)$$

т. е. *изображение суммы нескольких функций равно сумме изображений, а постоянный множитель можно выносить за знак преобразования Лапласа*.

2) ***Дифференцирование изображения.***

Если $F(p) \risingdotseq f(x)$, то $(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \risingdotseq x^n f(x)$ (48)

- при умножении оригинала на независимую переменную в n-ой степени от изображения берётся n-ая производная с соответствующим знаком.

3) ***Теорема подобия.***

Для любой постоянной $\alpha > 0$ $\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \risingdotseq f(\alpha x)$. (49)

Умножение аргумента оригинала на положительное число α *приводит к делению изображения и его аргумента на это число* α.

4) ***Теорема запаздывания.***

Если $F(p) \risingdotseq f(x)$, то $F(p+\alpha) \risingdotseq e^{-\alpha x} f(x)$. (50)

5) ***Изображение производных.***

Если $F(p) \risingdotseq f(x)$, то $pF(p) - f(0) \risingdotseq f'(x)$,

$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \risingdotseq f''(x), \qquad (51)$$

$$p^nF(p) - p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \cdots$$
$$\ldots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0) \risingdotseq f^{(n)}(x).$$

Приведём формулы изображений некоторых функций.

Таблица изображений основных функций

№	Оригинал $f(x)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^\infty f(x)e^{-px}\,dx$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$\sin ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$

3	$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
4	e^{-ax}	$\frac{1}{p+a}$
5	$shax = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
6	$chax = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
7	$e^{-ax}\sin bx$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
8	$e^{-ax}\cos bx$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
9	x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
10	$x\sin ax$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
11	$x\cos ax$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
12	xe^{-ax}	$\frac{1}{(p+a)^2}$

Разложение на простые дроби

Если $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ есть дробно-рациональная функция, причём степень числителя $A(p)$ меньше степени знаменателя $B(p)$ (правильная дробно-рациональная функция), то эту дробь разлагают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства (47) – (51) и таблицу изображений. Всякую правильную дробно-рациональную функцию можно представить в виде суммы простейших дробей четырёх видов: I) $\frac{C}{p-a}$, II) $\frac{C}{(p-a)^k}$, III) $\frac{Cp+D}{p^2+a_1p+a_2}$ – корни знаменателя – комплексные, IV) $\frac{Cp+D}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$,

где $k \geq 2$ и корни знаменателя – комплексные.

Для дроби вида I по формуле (4) «Таблицы изображений» получаем : $\frac{C}{p-a} \risingdotseq Ce^{ax}$. (52)

Для дроби вида II на основании формулы (9) «Таблицы» и свойства 4 (Теорема запаздывания) получаем:

$$\frac{C}{(p-a)^k} \risingdotseq C\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}e^{ax} . \qquad (53)$$

Рассмотрим дробь III вида. Произведём над ней преобразования:

$$\frac{Cp+D}{p^2+a_1p+a_2} = \frac{Cp+D}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= \frac{C\left(p+\frac{a_1}{2}\right)+\left(D-\frac{Ca_1}{2}\right)}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= \frac{C(p+\frac{a_1}{2})}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} +$$

$$+\left(D-\frac{Ca_1}{2}\right)\frac{1}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}.$$

Обозначая первое и второе слагаемое через M и N соответственно, получим с помощью формулы (8) и (7) «Таблицы»:

$$M \risingdotseq Ce^{-\frac{a_1}{2}x}\cos\left(x\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)$$

$$N \risingdotseq \left(D-\frac{Ca_1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}e^{-\frac{a_1}{2}x}\sin\left(x\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right).$$

Окончательно имеем

$$\frac{Cp+D}{p^2+a_1p+a_2} \risingdotseq e^{-\frac{a_1}{2}x}\left[C\cos\left(x\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{D-\frac{Ca_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\sin\left(x\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)\right]. \quad (54)$$

Рассматривать дробь IV вида не будем, т. к. это связано с громоздкими вычислениями.

Приведём несколько примеров построения изображения и восстановления оригинала.

Пример 17. а) Найти изображение функции $f(x)=\cos^2 x$.

По формуле Эйлера $\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$,

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\ .$$

Применяя формулы 1 и 3 «Таблицы», получаем:

$$F(p) = \frac{1}{2}\,\frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{2p}.$$

б) Найти изображение функции $f(x) = shax \cdot \sin bx$.

Поскольку $shax \;=\; \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$, то

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{ax}\sin bx - \frac{1}{2}e^{-ax}\sin bx\ .$$

Применяя формулу 7 «Таблицы», получаем:

$$F(p) = \frac{1}{2}\,\frac{b}{(p-a)^2+b^2} - \frac{1}{2}\,\frac{b}{(p+a)^2+b^2}\ .$$

в) Найти изображение функции $f(x) = x\ ch\ bx$.

Поскольку

$$f(x) = \frac{1}{2}x(e^{bx} + e^{-bx}) = \frac{1}{2}xe^{bx} + \frac{1}{2}xe^{-bx},$$

по формуле 12 «Таблицы» получаем

$$F(p) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(p+b)^2}.$$

г) Найти оригинал функции $F(p) = \frac{p}{p^2-2p+5}$.

Разложим дробь на сумму простых дробей, оригиналы которых можно найти по формулам 7 и 8 «Таблицы»:

$$\frac{p}{p^2-2p+5} = \frac{(p-1)+1}{(p-1)^2+4} =$$

$$=\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}+\frac{1}{(p-1)^2+2^2}=$$

$$=\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}\risingdotseq e^x\cos 2x\,.$$

Аналогично: $\frac{1}{2}\,\frac{2}{(p-1)^2+2^2}\risingdotseq\frac{1}{2}e^x\sin 2x\,.$

Окончательно

$$\frac{p}{p^2-2p+5}\risingdotseq e^x\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right).$$

д) Найти оригинал функции $F(p)=\frac{1}{p^3-8}$.

Разложим данную дробь на простейшие дроби и используем формулу (54)

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{1}{(p-2)(p^2+2p+4)}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}=$$

$$=\frac{A(p^2+2p+4)+(p-2)(Bp+C)}{(p-2)(p^2+2p+4)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(2A-2B+C)p+(4A-2C)}{(p-2)(p^2+2p+4)}.$$

Приравнивая слева и справа в числителе коэффициенты при одинаковых степенях p, получаем систему

$$\begin{array}{l} p^2: \\ p\,: \\ p^0: \end{array}\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B+C=0 \\ 4A-2C=1 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получаем

$$A=\frac{1}{12},\qquad B=-\frac{1}{12},\qquad C=-\frac{1}{3}.$$

Таким образом:

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{1}{12}\,\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\,\frac{p+4}{p^2+2p+4}=$$

$$=\frac{1}{12}\,\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\,\frac{p+1}{(p+1)^2\left(\sqrt{3}\right)^2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\,\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}.$$

Используя формулу (52) и (54) или формулы 4, 7 и 8 из «Таблицы», получаем

$$\frac{1}{p^3-8}\risingdotseq\frac{1}{12}e^{2x}-\frac{1}{12}e^{-x}\left(\cos\sqrt{3}x+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x\right).$$

Пример 18. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+5y=0, \tag{55}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0)=0,\ y'(0)=1. \text{ (Задача Коши)} \tag{56}$$

Обозначим $\overline{y}(p)\risingdotseq y(x)$. Тогда по формулам (51):

$y'(x)\risingdotseq p\overline{y}(p)-y(0)=p\overline{y}(p)$ и

$y''(x)\risingdotseq p^2\overline{y}(p)-py(0)-y'(0)=p^2\overline{y}(p)-1$.

Подставим эти результаты в (55) и запишем уравнение в изображениях с учетом начальных условий (56):

$p^2\overline{y}-1-4p\overline{y}+5\overline{y}=0$ или $\overline{y}(p^2-4p+5)=1$.

Откуда получаем изображение решения задачи (55)-(56):

$$\overline{y}=\frac{1}{p^2-4p+5}=\frac{1}{(p-2)^2+1}.$$

По формуле (7) «Таблицы» восстанавливаем искомое решение $y(x)=e^{2x}\sin x$.

В Примере 15 мы решали неоднородное линейное уравнение (35) без интегрирования, подбирая его частное решение по виду правой части. Найдём теперь решение уравнения (35) с заданными начальными условиями (36) с помощью операционного исчисления.

Пример 19. Найти частное решение уравнения

$$y'' + 4y = \sin 3x, \qquad (35)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, y'(0) = 0\ , \qquad (36)$$

методами операционного исчисления.

Как и в предыдущем примере обозначим $\overline{y}(p) \risingdotseq y(x)$,
$y''(x) \risingdotseq p^2\overline{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2\overline{y}(p) - p$.

Запишем уравнение (35) в изображениях с учётом начальных условий:

$$p^2\overline{y} - p + 4\overline{y} = \frac{3}{p^2+9}, \overline{y}(p^2+4) = \frac{3}{p^2+9} + p.$$

Изображение решения имеет вид:

$$\overline{y} = \frac{p^3 + 9p + 3}{(p^2+9)(p^2+4)}.$$

Разложим дробь в сумму простых слагаемых

$$\frac{p^3 + 9p + 3}{(p^2+9)(p^2+4)} = \frac{Ap+B}{p^2+9} + \frac{Cp+D}{p^2+4} =$$

$$= \frac{(Ap+B)(p^2+4) + (Cp+D)(p^2+9)}{(p^2+9)(p^2+4)} =$$

$$= \frac{(A+C)p^3 + (B+D)p^2 + (4A+9C)p + 4B + 9D}{(p^2+9)(p^2+4)}.$$

Приравнивая в числителе коэффициенты при одинаковых степенях p, получаем систему

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B + D = 0 \\ 4A + 9C = 9 \\ 4B + 9D = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} A + C = 1 \\ 4A + 9C = 9 \\ B + D = 0 \\ 4B + 9D = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = 0 \\ C = 1 \\ B = -\frac{3}{5} \\ D = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

Теперь

$$\overline{y} = -\frac{3}{5}\frac{1}{p^2+9} + \frac{3}{5}\frac{1}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+4} =$$

$$= -\frac{1}{5}\frac{3}{p^2+9} + \frac{3}{10}\frac{2}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+4}.$$

По формулам (2)-(3) «Таблицы» восстанавливаем искомое решение

$$y(x) = -\frac{1}{5}\sin 3x + \frac{3}{10}\sin 2x + \cos 2x.$$

Как и следовало ожидать, оно в точности совпадает с решением (40), полученным другим способом.

6. Варианты домашнего задания № 4

Задача 1. Для чисел z_1 и z_2 вычислить:

а) сумму $z_1 + z_2$ и разность $z_1 - z_2$ в алгебраической форме; б) произведение $z_1 \cdot z_2$ и частное $\frac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической форме. Результаты изобразить графически.

Варианты.

1. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -3 - 3i;$
2. $z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = 6i;$
3. $z_1 = -1 - i,\ z_2 = 1;$
4. $z_1 = -2 - 2i,\ z_2 = i;$
5. $z_1 = -1 - i,\ z_2 = 2 + 2i;$
6. $z_1 = 4 + 4i,\ z_2 = -3 - 3i;$
7. $z_1 = -2 + 2i,\ z_2 = 1 - i;$
8. $z_1 = 8 + 8i,\ z_2 = -2 - 2i;$
9. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -2 + 2i;$
10. $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 3 + 3i;$
11. $z_1 = 8 - 8i,\ z_2 = 6i;$
12. $z_1 = 4 - 4i,\ z_2 = -1 + i;$
13. $z_1 = 9 - 9i,\ z_2 = 5;$
14. $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 2i;$
15. $z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = 5 - 5i;$
16. $z_1 = -i,\ z_2 = 5 + 5i;$
17. $z_1 = -64 + 64i,\ z_2 = 1 - i;$

21. $z_1 = -4 + 4i,\ z_2 = 1 - i$
22. $z_1 = 3 - 3i,\ z_2 = 5 + 5i$
23. $z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = -i$
24. $z_1 = -8 + 8i,\ z_2 = 5 + 5i$
25. $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i,\ z_2 = -i$
26. $z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = 1 + i$
27. $z_1 = -5 + 5i,\ z_2 = 3 + 3i$
28. $z_1 = i,\ z_2 = 2 + 2i$
29. $z_1 = -i,\ z_2 = 3i$
30. $z_1 = 25 - 25i,\ z_2 = 1 - i$
31. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -2 + 2i$
32. $z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = i$
33. $z_1 = -1 - i,\ z_2 = 2i$
34. $z_1 = -2 - 2i,\ z_2 = 5 + 5i$
35. $z_1 = -1 - i,\ z_2 = 3i$
36. $z_1 = 4 + 4i,\ z_2 = -3i$
37. $z_1 = -2 + 2i,\ z_2 = 6i$

18. $z_1 = -2 + 2i,\ z_2 = 7i;$ 38. $z_1 = 8 + 8i,\ z_2 = -3i$

19. $z_1 = i,\ z_2 = 3 - 3i;$ 39. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 5i$

20. $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 2 + 2i;$ 40. $z_1 = -1 + i,\ z_2 = 1 - i.$

Задача 2. Вычислить и результат изобразить графически.
Варианты.

1. $\sqrt[3]{1+i}$
2. $\sqrt[4]{2-2i}$
3. $\sqrt[4]{-1-i}$
4. $\sqrt[4]{-2-2i}$
5. $\sqrt[3]{-1-i}$
6. $\sqrt[4]{4+4i}$
7. $\sqrt[3]{-2+2i}$
8. $\sqrt[3]{8+8i}$
9. $\sqrt[4]{1+i}$
10. $\sqrt[3]{-1+i}$
11. $\sqrt[3]{8-8i}$
12. $\sqrt[4]{4-4i}$
13. $\sqrt[4]{9-9i}$
14. $\sqrt[4]{1-i}$
15. $\sqrt[3]{2+2i}$
16. $\sqrt[4]{-i}$
21. $\sqrt[4]{-1+i}$
22. $\sqrt[4]{8-8i}$
23. $\sqrt[3]{4-4i}$
24. $\sqrt[3]{1-i}$
25. $\sqrt[4]{-4+4i}$
26. $\sqrt[3]{3-3i}$
27. $\sqrt[4]{2+2i}$
28. $\sqrt[3]{-8+8i}$
29. $\sqrt[4]{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$
30. $\sqrt[3]{2-2i}$
31. $\sqrt[4]{-25+25i}$
32. $\sqrt[3]{i}$
33. $\sqrt[3]{-i}$
34. $\sqrt[4]{25-25i}$
35. $\sqrt[4]{1+i}$
36. $\sqrt[3]{2-2i}$

17. $\sqrt[3]{-64+64i}$

18. $\sqrt[4]{-2+2i}$

19. $\sqrt[4]{i}$

20. $\sqrt[3]{-9+9i}$

37. $\sqrt[3]{-2-2i}$

38. $\sqrt[3]{-2-2i}$

39. $\sqrt[4]{-2-2i}$

40. $\sqrt[3]{4+4i}$.

Задача 3. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Варианты.

1. $y'\sin x - y\cos x = 1, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$
2. $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x\,, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$
3. $y' + \frac{2y}{x} = -x^2, \qquad y(3)=1$
4. $y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}, \qquad y(0)=2$
5. $(1+x^2)y - 2xy = (1+x^2)^2, \qquad y(-2)=5$
6. $xy' - 2y = x^3\cos x\,, \qquad y(\pi)=1$
7. $y\sin x = y'\ln y\,, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$
8. $y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x\,, \qquad y(e)=0$
9. $y' + 2xy = xe^{-x^2}, \qquad y(0)=4$
10. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \qquad y(0)=1$
11. $y'\cos x - 2y\sin x = 2, \qquad y(0)=3$
12. $y' - \frac{3y}{x} = x^3e^x, \qquad y(1)=e$

13. $\sin y \cdot \cos x dy = \cos y \cdot \sin x dx, \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}$

14. $xy' - 3y = x^4 e^x, \qquad y(1) = e$

15. $y' \cos x + y \sin x = 1, \qquad y(0) = 2$

16. $y' - xy = x^2 y, \qquad y(0) = 1$

17. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

18. $y' - \frac{y}{x} = -2\ln x, \qquad y(1) = 1$

19. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx, \qquad y(1) = \frac{1}{5}$

20. $xy' + 2y = \frac{1}{x}, \qquad y(3) = 1$

21. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx, \qquad y(1) = 2$

22. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0, \qquad y(1) = 1$

23. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

24. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy, \qquad y(1) = 1$

25. $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

26. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx, \qquad y(1) = 2$

27. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \qquad y(-1) = \frac{3}{2}$

28. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0, \qquad y(1) = -1$

29. $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \qquad y(0) = 1$

30. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0, \qquad y(0) = 3$

31. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x$, $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

32. $yy'\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + x = 0$, $\quad y(0) = 0$

33. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$, $\quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$

34. $y' = 2^{x-y}$, $\quad y(-3) = -5$

35. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $\quad y(0) = \frac{2}{3}$

36. $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx$, $\quad y(0) = 0$

37. $(x^2+5)y' + x(y+1) = 0$, $\quad y(2) = 0$

38. $(1+x^2)y^3dx - (y^2-1)x^3dy = 0$, $\quad y(1) = -1$

39. $y' = -\frac{y}{x} + \frac{x+1}{x}e^x$, $\quad y(1) = e$

40. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $\quad y(1) = 3$

Задача 4. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ двумя способами

а) без интегрирования по виду правой части (Правила 1-4),

б) с помощью операционного исчисления.

Варианты.

1. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$, $\quad y(0) = -1$, $\quad y'(0) = 0$
2. $y'' + y' = x\cos x$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0$
3. $y'' - 2y' = e^x$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$
4. $y'' + 2y' - 3y = e^{-x}$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$

5. $y'' + 2y' = x \sin x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$
6. $y'' + 2y' + y = \sin x, y(0) = 0, y'(0) = -1$
7. $y'' - 2y' + y = e^{2x}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$
8. $y'' - 2y' + 2y = 1, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 0$
9. $y'' + y' = \cos x, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 0$
10. $y'' + 2y' + y = x^2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$
11. $y'' + 2y' + 5y = 3, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$
12. $y'' + 2y' + 2y = 1, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$
13. $y'' + y = 1, \qquad y(0) = -1, \qquad y'(0) = 0$
14. $y'' + 4y = x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$
15. $y'' - 2y' + 5y = 1 - x, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0$
16. $y'' + y' = \cos x, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 0$
17. $y'' - y' = xe^{-x}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$
18. $y'' + 2y' + y = x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$
19. $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$
20. $y'' - y = \sin x, \qquad y(0) = -1, \qquad y'(0) = 0$
21. $y'' + y = \sin 2x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1$
22. $y'' - 2y' + y = x, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 0$
23. $y'' + 2y' + y = 2\cos x, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$
24. $y'' + 4y = 2\cos 3x, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$
25. $y'' + y = xe^{x}, \qquad y(0) = -1, y'(0) = 0$
26. $y'' + y' = xe^{x}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$
27. $y'' + y' = 4\sin x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = -1$
28. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$

29. $y'' - y' = x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

30. $y'' + y = \cos 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

31. $y'' + 4y = \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

33. $y'' + y = 5x - 2, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$

34. $y'' + 2y' + 5y = xe^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

35. $y'' + y' = x \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

36. $y'' + 3y' = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$

37. $y'' + 9y = 36e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

38. $y'' + y' = \sin 2x, \quad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = 0$

39. $y'' - 5y' - 6y = 2\cos x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

40. $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$