КРАТКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Санкт-Петербург
ТОО «Мигус»
1995

КРАТКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

(для средней школы)

ЛР № 063406 от 26.05.94. Подписано в печать 03.03.95.
Формат 84×108/32. Тираж 100 000 экз. Заказ 1145.

Издательство ТОО «Мигус». Санкт-Петербург, ул. Димитрова, 16/1.

Отпечатано с оригинал-макета в ГПП «Печатный Двор»
Комитета РФ по печати.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский пр., 15.

ISBN 5-7062-0082-3

АЛГЕБРА

1. Тождественные преобразования

1.1 Формулы разложения на множители

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2).$

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3.$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3.$

$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2),$

где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

$p(x) = (x - x_1)q(x)$, где x_1 - корень многочлена $p(x)$.

1.2 Модуль числа

1.2.1. Определение

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

1.2.2. Свойства

$|a| \ge 0.$

$|a|^{2n} = a^{2n}, n \in N.$

$|ab| = |a| \cdot |b|.$

$|a+b| \le |a| + |b|.$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

1.3 Корень n-ой степени

1.3.1. Определения

Если $a \ge 0$, то ***корнем n-ой степени*** (n=2,3,4...) ***из числа*** a называется такое неотрицательное число b, для которого выполняется равенство $b^n = a$:

$\sqrt[n]{a} = b, a \geq 0 \Leftrightarrow b^n = a, b \geq 0.$

Если, $a < 0$, а $n \geq 3$ - нечетное число, то ***корнем n-ой степени из числа*** a называется такое отрицательное число b, для которого выполняется равенство $b^n = a$.

$\sqrt[n]{a} = b$, где n-нечетное число, $a < 0 \Leftrightarrow b^n = a, b < 0$

1.3.2. Два основных тождества

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$, если n - четное число;

$\sqrt[n]{a^n} = a$, если n - нечетное число.

1.3.3. Свойства (для $a > 0, b > 0$)

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}.$

$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}.$

1.4. Степень с рациональным показателем

1.4.1. Определения

$a^1 = a.$

Если $n \in N, n \neq 1$, то $a^n = aa\ldots a$ (n сомножителей).

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1.$

Если $a \geq 0$, то $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.$

Если $a \neq 0$ и $n \in N$, то $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}.$

Если $a > 0$ и $r = \dfrac{p}{q}$, то $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}.$

1.4.2. Свойства

$a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}.$

$\dfrac{a^{r_1}}{a^{r_2}} = a^{r_1-r_2}.$

$a^r b^r = (ab)^r$

$\dfrac{a^r}{a^r} = \left(\dfrac{a}{a}\right)^r.$

$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$.

1.5. Логарифмы

1.5.1. Определение

Логарифмом положительного числа b по положительному основанию $a \neq 1$ называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b:

$$\log_a b = c, b > 0, a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow a^c = b, a > 0, a \neq 1.$$

1.5.2. Два основных тождества

$a^{\log_a b} = b$; $\qquad \log_a a^r = r$.

1.5.3. Свойства (для $b > 0, c > 0$)

$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$. $\qquad \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$. $\qquad \log_a b = \log_{a^r} b^r \ (r \neq 0)$.

$\log_a b^r = r \log_a b$.

1.5.4. Свойства (для произвольных b, c одного знака)

$\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|$.

$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$.

$\log_a b^{2n} = 2n \log_a |b| \ (n \in N)$.

1.5.5. Десятичный логарифм

$\log_{10} b = \lg b$ (общепринятая запись).

1.5.6. Натуральный логарифм

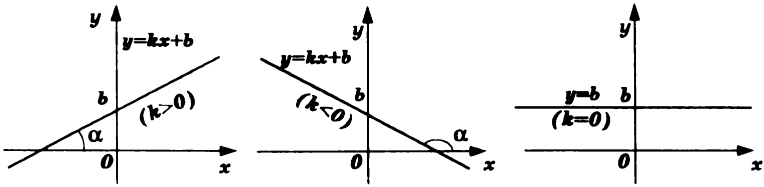
$\log_e b = \ln b$ (общепринятая запись).

$e = 2{,}7182818284590\ldots$; обычно считают, что $e \approx 2{,}7$.

2. Функции

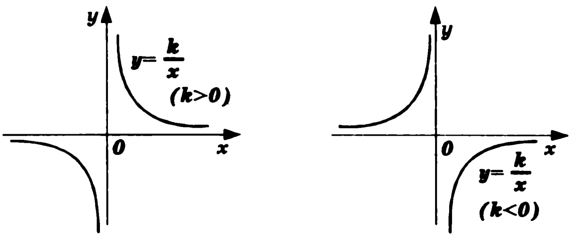
2.1. Линейная функция

Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая. $k = tg\alpha$ - угловой коэффициент.



2.2. Обратная пропорциональность

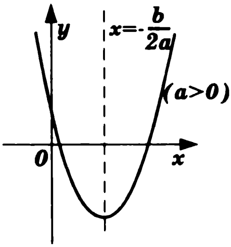
Графиком функции $y = \dfrac{k}{x}$ является гипербола с асимптотами $x = 0, y = 0$.

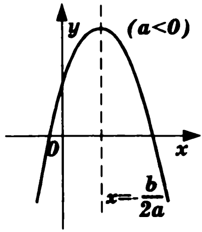


2.3. Квадратичная функция

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с ветвями, направленными вверх, если

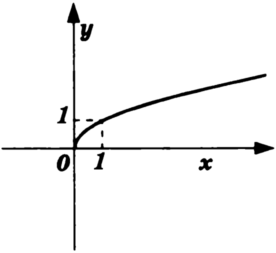
$a > 0$, и вниз, если $a < 0$; осью симметрии параболы служит прямая $x = -\dfrac{b}{2a}$.



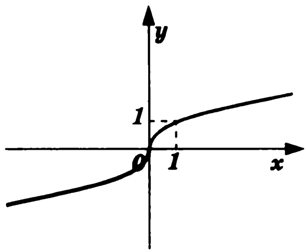


2.4. Функция $y = \sqrt[n]{x}$

n - четное число

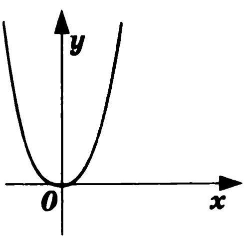


n - нечетное число.

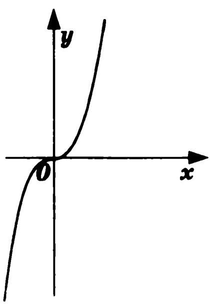


2.5. Степенная функция $y = x^r$

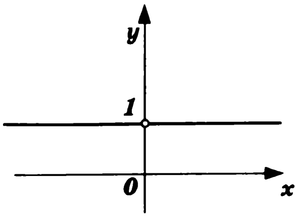
$y = x^r$; $r = 2n, n \in N$.



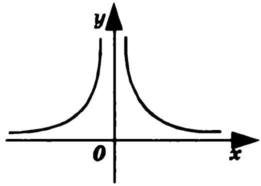
$y = x^r$; $r = 2n+1, n \in N$.



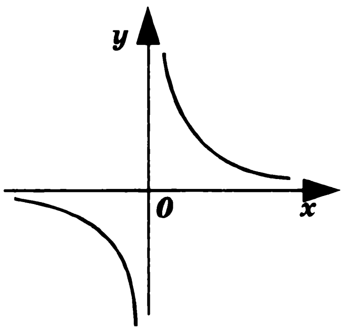
$y = x^r;\ r = 0.$



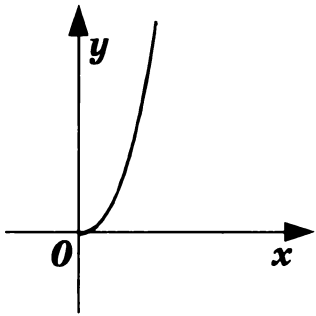
$y = x^r;\ r = -2n, n \in N.$



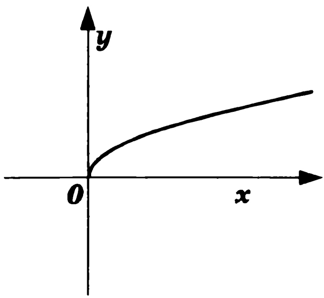
$y = x^r;\ r = -(2n-1), n \in N.$



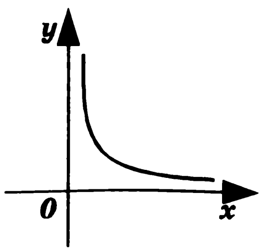
$y = x^r;\ r = \dfrac{p}{q} > 1.$



$y = x^r;\ r = \dfrac{p}{q},\ 0 < \dfrac{p}{q} < 1.$

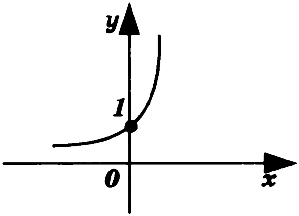


$y = x^r;\ r = -\dfrac{p}{q},\ \dfrac{p}{q} > 0.$

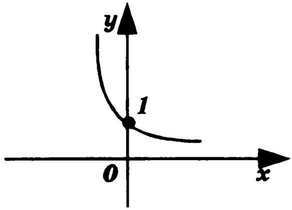


2.6. Показательная и логарифмическая функции

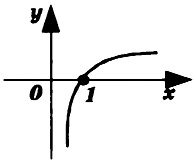
$y = a^x,\ a > 1.$



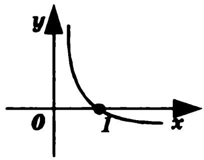
$y = a^x,\ 0 < a < 1.$



$y = \log_a x,\ a > 1.$



$y = \log_a x,\ 0 < a < 1.$



2.7. Свойства функций

2.7.1. Четность

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$ для любого x из области определения функции. График четной функции симметричен относительно оси y.

2.7.2. Нечетность

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для любого x из области определения функции. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

$f(x)=f(x+T)=f(x-T)$ выполняется для любого x из области определения функции; T -***период функции***.

2.7.4. Монотонность

Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на промежутке X, если для любых x_1, x_2 из X таких, что, $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

2.7.5 Ограниченность

Функция $y=f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** на промежутке X, если существует такое число M, что $f(x) \leq M$ для любого x из X. График такой функции расположен ниже прямой $y=M$.

Функция $y=f(x)$ называется ***ограниченной снизу*** на промежутке X, если существует такое число m, что $f(x) \geq m$ для любого x из X. График такой функции расположен выше прямой $y=m$.

Функция $y=f(x)$ называется ***ограниченной*** на промежутке X, если она на этом промежутке ограничена и сверху и снизу.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она на этом отрезке ограничена.

2.8. Построение графиков функций с помощью преобразований известных графиков

Пусть график функции $y=f(x)$ построен.

Чтобы построить график функции, $y=f(x+a)+b$, нужно:
осуществить параллельный перенос графика $y=f(x)$ на вектор $(-a,b)$.

Чтобы построить график функции $y=|f(x)|$, нужно:

оставить без изменения ветви графика $y = f(x)$, которые лежат выше оси x.

заменить ветви графика $y = f(x)$, которые лежат ниже оси x, симметричными им относительно оси x;

Чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, нужно:

оставить без изменения ветви графика $y = f(x)$, которые лежат правее оси у;

отбросить ветви графика $y=f(x)$, которые лежат левее оси y; добавить к оставшимся ветвям симметричные им относительно оси y.

Чтобы построить график функции $y = kf(x)$, нужно: осуществить растяжение графика $y = f(x)$ от оси x по вертикали в $|k|$ раз (если $|k|<1$, то фактически получится сжатие); если при этом $k<0$ то растянутый график нужно заменить симметричным ему относительно оси x.

При этом преобразовании остаются неподвижными точки пересечения графика $y = f(x)$ с осью x.

Чтобы построить график функции $y=f(mx)$, нужно: осуществить сжатие графика $y = f(x)$ к оси y по горизонтали в $|m|$ раз, (если $|m|<1$, то получится растяжение с коэфицентом $\frac{1}{|m|}$); если при этом $m<0$, то сжатый график нужно заменить симметричным ему относительно оси y.

При этом преобразовании остается неподвижной точка пересечения графика $y=f(x)$ с осью y.

3. Уравнения

3.1. Квадратные уравнения

3.1.1. Формулы корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

Число b^2-4ac – дискриминант квадратного уравнения (обозначается буквой D).

3.1.2 *Теорема Виета и ее следствия*

Если x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, то:

$x_1+x_2=-p,$

$x_1x_2=q,$

$x_1^2+x_2^2=p^2-2q,$

$x_1^3+x_2^3=-p(p^2-3q),$

$x_1^4+x_2^4=(p^2-2q)^2-2q^2.$

3.2. Алгоритм решения уравнения 3-й степени

$ax^3+bx^2+cx+d=0$, где a,b,c,d - целые числа; $a\neq 0$.

1. Выпишите все делители свободного члена d.
2. Выберите среди этих делителей то число x_1, которое является корнем уравнения (если такого числа нет, то алгоритм неприменим).
3. Разделите ax^3+bx^2+cx+d на $(x-x_1)$, получите в частном квадратный трехчлен $ax^2+b_1x+c_1$
4. Найдите корни x_2, x_3 уравнения $ax^2+b_1x+c_1=0$
5. Запишите ответ: x_1, x_2, x_3 - корни уравнения.

3.3. Иррациональные уравнения

Если n - нечетное число, то уравнение $\sqrt[n]{f(x)}=q(x)$ равносильно уравнению $f(x)=(q(x))^n$.

Если n - четное число, то уравнение $\sqrt[n]{f(x)}=q(x)$ равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ q(x)\geq 0, \\ f(x)=(q(x))^n. \end{cases}$$

3.4. Показательные уравнения

Если $a>0, a\neq 1$, то уравнение $a^{f(x)}=a^{q(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=q(x)$.

3.5. Логарифмические уравнения

Если $a > 0, a \neq 1$, то уравнение $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} q(x)$ равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ q(x) > 0, \\ f(x) = q(x). \end{cases}$$

4. Неравенства

4.1. Свойства числовых неравенств

Если $a > b,\ b > c$, то $a > c$.
Если $a > b$, то $a + c > b + c$.
Если $a > b, c > d$, то $a + c > b + d$.
Если $a > b, c < d$, то $a - c > b - d$.
Если $a > b, m > 0$, то $am > bm$.
Если $a > b, m < 0$, то $am < bm$.
Если $a > b > 0,\ a > d > 0$, то $ac > bd$.
Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
Если $a > b > 0$, то $a^n > b^n$.
Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$.

4.2. Неравенства с модулями

Неравенство вида $|f(x)| > q(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) > q(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ -f(x) > q(x); \end{cases}$$

4.3. Иррациональные неравенства

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} < q(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ q(x) > 0, \\ f(x) < (q(x))^2; \end{cases}$$

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} > q(x)$ равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ q(x) \geq 0, \\ f(x) > (q(x))^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ q(x) < 0. \end{cases}$$

4.4. Показательные неравенства

Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{q(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > q(x)$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{q(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) < q(x)$.

4.5. Логарифмические неравенства

Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a q(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ q(x) > 0, \\ f(x) > q(x). \end{cases}$$

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a q(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ q(x) > 0, \\ f(x) < q(x). \end{cases}$$

Неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} q(x)$ равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} a(x) > 1, \\ q(x) > 0, \\ f(x) > q(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < q(x). \end{cases}$$

5. Прогрессии

5.1. Арифметическая прогрессия

5.1.1. Определение

Арифметической прогрессией называется последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, каждый член которой, кроме первого, отличается от предыдущего на одно и то же число d:

$a_{n+1} = a_n + d$; d - разность прогрессии.

5.1.2. Свойства

$a_n = a_1 + d(n-1)$ (формула n-го члена);

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$ (формула суммы первых n членов прогрессии: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$).

Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего, в случае конечной последовательности), равен среднему арифметическому своих соседних членов:

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ (характеристическое свойство).

5.2. Геометрическая прогрессия

5.2.1. Определение

Геометрической прогрессией называется последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, каждый член которой, кроме первого, получается путем умножения предыдущего члена на одно и то же число $q \neq 0$:

$b_{n+1} = b_n q$ $(q \neq 0,\ b_1 \neq 0)$, где q - знаменатель прогресии.

5.2.1.Свойства

$b_n = b_1 q^{n-1}$ (формула n-го члена).

$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ (формула суммы первых n членов прогрессии:

$S = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$.

Если $|q| < 1$ и $S = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$, то

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего, в случае конечной последовательности), равен по модулю среднему геометрическому своих соседних членов:

$|b_n| = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$.Или, что то же самое, $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. Тригонометрические функции

1.1 Числовая окружность

1.1.1. Определение

Пусть дана окружность радиуса 1. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:

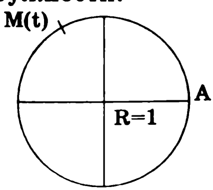
Если $t = 0$, то ему соответствует точка А - правый конец горизонтального диаметра.

Если $t > 0$, то, отправляясь из точки А, опишем по окружности в направлении против часовой стрелки путь длиной t ; конец этого пути и будет искомой точкой $M(t)$.

Если $t < 0$, то, отправляясь из точки А, опишем по окружности в направлении по часовой стрелке путь длиной $|t|$; конец этого пути и будет искомой точкой $M(t)$.

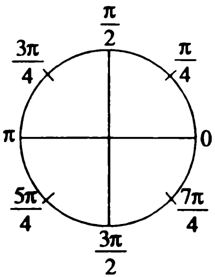
Единичная окружность с установленным соответствием называется ***числовой окружностью.***

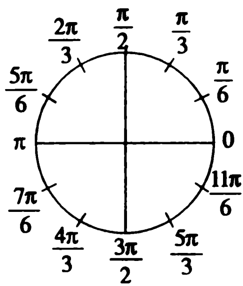
Каждому действительному числу соответствует единственная точка окружности.



Если точка M соответствует числу t, то она соответствует любому числу вида $t+2\pi k$, где 2π - длина единичной окружности, а k - целое число, показывающее количество полных обходов окружности в ту или иную сторону.

1.1.2. Два основных макета числовой окружности:

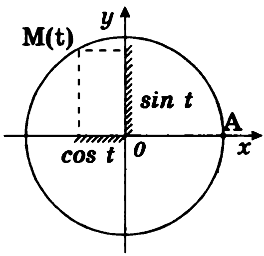




1.2. Тригонометрические функции

1.2.1. Определение

$\sin t$ - ордината точки $M(t)$ числовой окружности:
$\cos t$ - абсцисса точки $M(t)$.

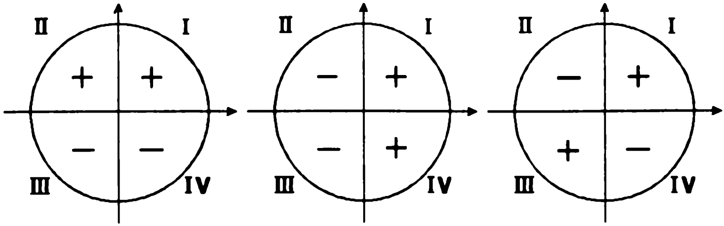


$$tg\ t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

$$ctg\ t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

1.2.2. Знаки по четвертям

$\sin t$ $\cos t$ $tg\ t$, $ctg\ t$.



1.2.3. Свойства

$\sin t$, $tg\ t$, $ctg\ t$ - **нечетные функции,** $\cos t$ **- четная.**

2π **- период** $\sin t$, $\cos t$,

π **- период** $tg\ t$, $ctg\ t$.

1.2.4. Основные значения

Функция	**Аргумент**						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$tg\ t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$ctg\ t$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

1.3. Обратные тригонометрические функции

1.3.1. Определения

$\arcsin m$ **- это дуга, синус которой равен** m **и которая заключена в замкнутом промежутке от** $-\frac{\pi}{2}$ **до** $\frac{\pi}{2}$:

$$y = \arcsin m \Leftrightarrow \sin y = m,\quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

$\operatorname{arctg} m$ - это дуга, тангенс которой равен m и которая заключена в открытом промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$:

$$y = \operatorname{arctg} m \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = m,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

$\operatorname{arcctg} m$ - это дуга, котангенс которой равен m и которая заключена в открытом промежутке от 0 до π:

$$y = \operatorname{arcctg} m \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = m,\ 0 < y < \pi.$$

1.3.2. Основные соотношения

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

1.3.3. Основные значения

Функция	Аргумент				
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Функция	Аргумент			
	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

1.3.4. Основные формулы, связывающие тригонометрические и обратные тригонометрические функции

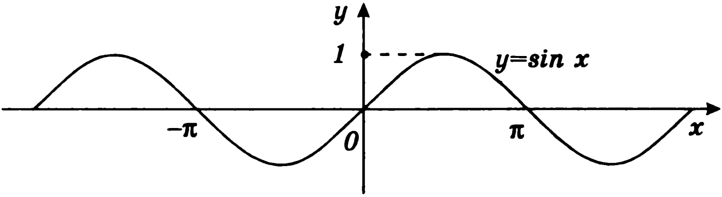
$$\sin\ (\arcsin x) = \cos(\arccos\ x) = x, (-1 \le x \le 1).$$

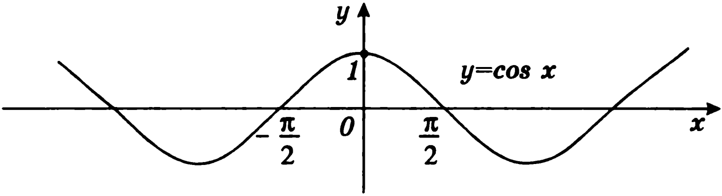
$$\operatorname{tg}\ (\operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, (x \neq 0).$$

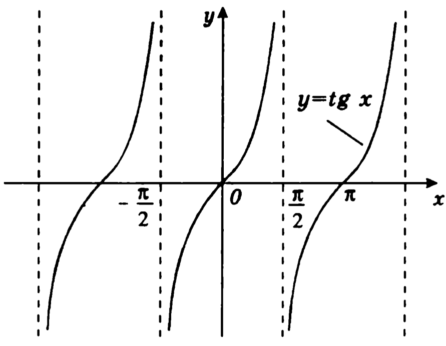
$$\sin(\arccos\ x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, (-1 \le x \le 1).$$

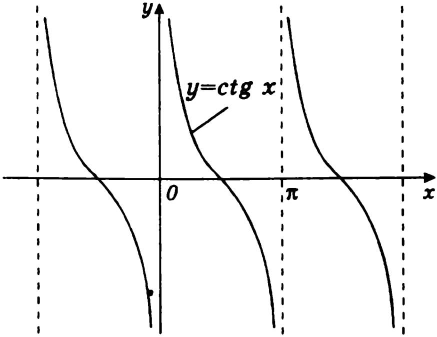
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, (x \neq 0).$$

1.4. Графики тригонометрических функций



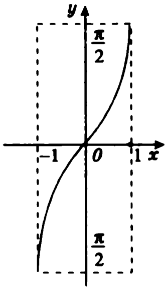




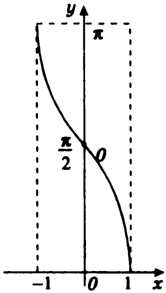


1.4. Графики обратных тригонометрических функций

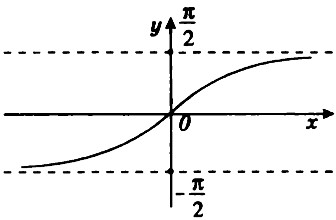
y=arcsin x



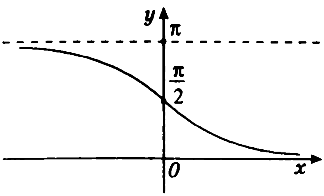
y=arccos x



y=arctg x



y=arcctg x



2.Формулы тригонометрии

2.1. Формулы, связывающие функции одного и того же аргумента

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1.$$

2.2. Формулы, связывающие функции аргументов, из которых один вдвое больше другого

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$ **(формулы понижения степени)**

$$1 \pm \sin 2x = (\cos x \pm \sin x)^2.$$

Если $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$, **то**

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$ **(универсальная подстановка)**

2.3. Формулы сложения аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \pm \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

2.4. Формулы преобразования сумм в произведения

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\ \cos\beta}.$$

$\mathrm{A}\sin t + \mathrm{B}\cos t = \sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}\sin(t+\varphi)$, где φ - вспомогательный угол, причем $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$.

2.5. Формулы преобразования произведений в суммы

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

2.6. Формулы приведения

Это формулы, с помощью которых тригонометрическая функция от аргумента вида $\dfrac{\pi n}{2} \pm \alpha$ преобразуется в тригонометрическую функцию от аргумента α.

Правило для запоминания формул приведения:

1.Для аргументов, отсчитываемых от горизонтального диаметра $(\pi \pm \alpha,\ 2\pi - \alpha)$, название функции не меняется.

2. Для аргументов, отсчитываемых от вертикального диаметра ($\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$), название функции меняется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

3. Перед полученной функцией ставится тот знак, который имела бы приводимия функция в той четверти, в которой лежит аргумент $\frac{\pi n}{2}\pm\alpha$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2.7. Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin\ x=a,\ |a|\le 1 \Leftrightarrow x=(-1)^n \arcsin a+\pi n.$

$\cos\ x=a,\ |a|\le 1 \Leftrightarrow x=\pm \arccos a+2\pi n.$

$\mathrm{tg}\ x=a \Leftrightarrow x=\mathrm{arctg}\ a+\pi n.$

$\mathrm{ctg}\ x=a \Leftrightarrow x=\mathrm{arcctg}\ a+\pi n,\ n\in Z.$

Частные случаи:

$\sin\ x=0 \Leftrightarrow x=\pi n.$

$\cos\ x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

$\cos\ x=1 \Leftrightarrow x=2\pi n.$

$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

$\cos\ x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2\pi n.$

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.Производная

1.1. Определение производной

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$, где $\Delta f=f(x)-f(x_0)$ (приращение функции); $\Delta x=x-x_0$ (приращение аргумента).

1.2. Формулы дифференцирования

$(c)' = 0.$

$(kx + b)' = k.$

$(x^r)' = rx^{r-1}.$

$(a^x)' = a^x \ln a.$

$(e^x)' = e^x.$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$

$(\sin\ x)' = \cos\ x.$

$(\cos\ x)' = -\sin x.$

$(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$(\mathrm{ctg}\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$(\arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-1 < x < 1).$

$(\arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-1 < x < 1).$

$(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arcctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

1.3. Правила дифференцирования

$(u \pm v)' = u' \pm v'.$

$(ku)' = ku'$ (k – число).

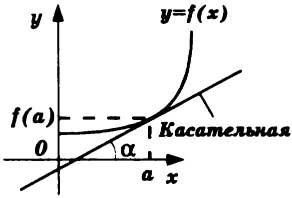
$(uv)' = u'v + uv'.$

$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$

$(u(v(x)))' = u'(v(x))v'(x)$(производная сложной функции).

1.4. Геометрический смысл производной

$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha = k$, где k - угловой коэффициент касательной.



1.5. Уравнение касательной

$y = f(a) + f'(a)(x - a).$

2. Исследование функций с помощью производной

2.1. Исследование на монотонность

Если $f'(x) > 0$ на промежутке X, то функция $y = f(x)$ возрастает на X.

Если $f'(x) < 0$ на промежутке X, то функция $y = f(x)$ убывает на X.

2.2. Исследование на экстремум

2.2.1. *Определение*

Если у точки x_0 существует окрестность, в которой функция $y = f(x)$ определена и $f(x) \le f(x_0)$, то x_0 называют ***точкой максимума*** функции; пишут $y_{\max} = f(x_0)$.

Если у точки x_0 существует окрестность, в которой функция $y = f(x)$ определена и $f(x) \ge f(x_0)$, то x_0 называют ***точкой минимума*** функции; пишут $y_{\min} = f(x_0)$.

2.2.2. *Алгоритм отыскания* y_{max}, y_{min} *для функции* $y = f(x)$

1. Найдите область определения функции.
2. Найдите $y' = f'(x)$.
3. Найдите точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, и выберите из них те, что принадлежат области определения функции.
4. Отметьте выбранные точки на числовой прямой и определите знаки y слева и справа от каждой из отмеченных точек.
5. Сделайте выводы: если производная y слева от отмеченной точки x_0 отрицательна, а справа положительна, то x_0 - точка минимума и $f(x_0) = y_{min}$; если производная y слева от отмеченной точки x_0 положительна, а справа отрицательна, то x_0 - точка максимума и $f(x_0) = y_{max}$.

2.3. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке

2.3.1. *Определение*

Говорят, что функция $y = f(x)$ достигает на промежутке X своего ***наибольшего (наименьшего) значения***, если существует точка $x_0 \in X$, такая, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)(f(x) \ge f(x_0))$; пишут $y_{наиб}=f(x_0)(y_{наим}=f(x_0))$.

Непрерывная функция на отрезке всегда достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

2.3.2. *Алгоритм отыскания* $y_{наиб}$, $y_{наим}$ *для функции* $y = f(x)$, *непрерывной на отрезке* $[a, b]$

1. Найдите $f'(x)$.

2. Найдите точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует, и выберите из них те, что лежат внутри отрезка $[a,b]$.

3. Составьте таблицу значений функции, куда включите точки a, b и точки, найденные на шаге 2.

4. Из найденных значений функции выберите наибольшее (это будет $y_{наиб}$ и наименьшее (это будет $y_{наим}$).

2.3.3. Случай незамкнутого промежутка

Непрерывная функция на незамкнутом промежутке может иметь и может не иметь $y_{наиб}$, $y_{наим}$.

Простейшие случаи:

Если непрерывная функция $y=f(x)$ имеет в промежутке X только одну точку экстремума x_0 и если x_0 - точка максимума, то $f(x_0)=y_{наиб}$.

Если непрерывная функция $y=f(x)$ имеет в промежутке X только одну точку экстремума x_0 и если x_0 - точка минимума, то $f(x_0)=y_{наим}$.

ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.Первообразная

1.1. Определение первообразной

Если для любого x из промежутка X выполняется равенство $F'(x)=f(x)$, то функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для $f(x)$ на промежутке X.

1.2. Правила вычисления первообразной

Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, а $H(x)$- первообразная для $h(x)$ на промежутке X, то $F(x)+H(x)$ - первообразная для $f(x)+h(x)$ на промежутке X.

Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на промежутке X, то $kF(x)$ - первообразная для $kf(x)$ на промежутке X (k - произвольное действительное число).

Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на промежутке X, то $\frac{1}{a}F(ax+b)$ - первообразная для $f(ax+b)$ на промежутке X.

1.3. Формулы вычисления первообразной $F(x)$ для функции $f(x)$

$f(x)$	1	$x^r (r \neq -1)$	$\frac{1}{x} (x > 0)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$F(x)$	x	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$\ln x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$

$f(x)$	e^x	$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$F(x)$	e^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\operatorname{arctg} x$	$\arcsin x$

2. Неопределенный интеграл

2.1. Определение неопределенного интеграла

Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на промежутке X, то множество всех первообразных для $f(x)$ имеет вид $\{F(x)+C\}$, где C - любое действительное число. Это множество называют ***неопределенным интегралом функции*** $f(x)$ и обозначают $\int f(x)dx$ (читается “ интеграл эф от икс дэ икс”):

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

2.2. Правила интегрирования

$$\int (f(x)+h(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int h(x)\,dx.$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

2.3. Формулы интегрирования

$$\int dx = x + C.$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \ (r \neq -1).$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x + C.$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\ x + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1).$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg\ x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arcsin\ x} + C.$$

3. Определенный интеграл

3.1. Формула Ньютона-Лейбница

Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на промежутке X и если a, b - точки из этого промежутка X, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$ **(формула Ньютона-Лейбница),**

где $\int_a^b f(x)dx$ - ***определенный интеграл;*** a,b - пределы интегрирования; $f(x)$ - подинтегральная функция.

3.2. Свойства определенного интеграла

$$\int_a^b (f(x)+h(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b h(x)\ dx.$$

$$\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx.$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$$

Если $a < c < b$, то $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$ (аддитивное свойство интеграла).

Если $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$.

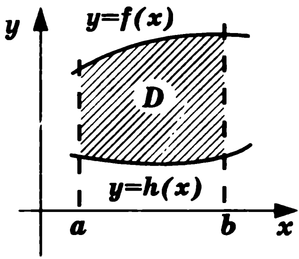
Если $f(x) \geq g(x)$ на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$.

3.3. Вычисление площадей плоских фигур с помощью интеграла

Если фигура D представляет собой часть плоскости xOy, ограниченную прямыми $x = a$, $x = b(a < b)$ и графиками непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $y = f(x)$, $y = h(x)$ таких, что для любого x из $[a;b]$ выполняется неравенство

$h(x) \le f(x)$, то площадь S фигуры D вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - h(x))\ dx.$$



ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Треугольники

1.1. Обозначения

A, B, C – углы; a, b, c – стороны; h_c - высота, проведенная к стороне С; m_c - медиана, проведенная к стороне С; S - площадь; R - радиус описанной окружности; r - радиус вписанной окружности; p - полупериметр.

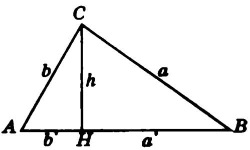
1.2. Равносторонний треугольник

$$A = B = C = 60^0;$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

1.3. Прямоугольный треугольник (*C=90°*)

1.3.1. *Метрические соотношения*



$a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора);

$a^2 = ca'$;

$b^2 = cb'$;

$h^2 = a'b'$;

$$h = \frac{ab}{c}.$$

1.3.2. *Площадь*

$$S = \frac{ab}{2}$$

1.3.3. *Формулы для вычисления радиусов* R и r

$$R = \frac{c}{2}, r = \frac{a+b-c}{2}.$$

1.3.4. *Соотношения между сторонами и углами*

$$\sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},\ tgA = \frac{a}{b},\ ctgA = \frac{b}{a}.$$

1.4. Произвольный треугольник

1.4.1. Четыре замечательные точки в треугольнике

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется **центром тяжести**.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка называется **ортоцентром**.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является **центром вписанной окружности**.

Перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника через их середины, пересекаются в одной точке. Эта точка является **центром описанной окружности**.

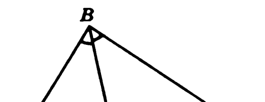
1.4.2. *Средняя линия треугольника*

Параллельна основанию.

Равна половине основания.

Делит пополам любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с какой-либо точкой основания.

1.4.3. *Свойство биссектрисы треугольника*



Пусть в треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Тогда $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ (биссектриса делит основание на части, пропорциональные боковым сторонам).

1.4.4. *Определение вида треугольника по его сторонам*

Пусть c - наибольшая из трех сторон треугольника.

Если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный.

Если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.

Если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.

1.4.5. *Площадь*

$$S = \frac{1}{2} c h_c,\ S = pr,\ S = \frac{1}{2} ab \sin C,$$
,
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона).

1.4.6. *Формулы для вычисления радиусов R и r*

$$R = \frac{a}{2 \sin A},\quad R = \frac{abc}{4S},\quad r = \frac{S}{p}.$$

1.4.7. *Соотношения между сторонами и углами*

$a^2 = b^2 + a^2 - 2bc \cos A$ (теорема косинусов).

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (теорема синусов).

1.4.8. *Три важные теоремы о площадях*

Если два треугольника подобны, то их площади относятся как квадраты соответствующих сторон.

Если у двух треугольников равны основания, то площади относятся как соответствующие высоты.

Если одна высота одного треугольника равна одной высоте другого треугольника, то площади относятся как стороны, к которым проведены эти высоты.

2. Четырехугольники

2.1. Выпуклый четырехугольник

2.1.1. *Площадь*

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi,$$

где d_1, d_2 - диагонали; φ - угол между ними.

$S = pr$, если в четырехугольник можно вписать окружность (p - полупериметр, r - радиус вписанной окружности).

2.1.2. *Вписанная окружность*

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны. Центром вписанной окружности служит точка пересечения биссектрис.

2.1.3. *Описанная окружность*

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180°. Центром описанной окружности служит точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам четырехугольника через их середины.

2.2. *Параллелограмм*

2.2.1. *Обозначения*

a, b - стороны; d_1, d_2 - диагонали; φ - угол между диагоналями; h_b - высота, проведенная к стороне b.

2.2.2. *Соотношение между сторонами и диагоналями*

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

2.2.3. *Площадь*

$S = bh_b$, $S = ab\sin C$, $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$.

2.3. *Трапеция*

2.3.1. *Средняя линия*

Параллельна основаниям.

Равна полусумме оснований.

Делит пополам любой отрезок, заключенный между основаниями.

2.3.2. *Площадь*

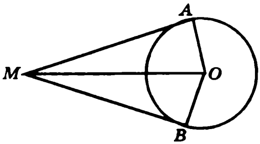
$S = \frac{a+b}{2}h$, где a, b - основания; h - высота.

$S = pr$, если в трапецию можно вписать окружность радиуса r.

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$ (см. п. 2.1.1).

3. Окружность и круг

3.1. *Два свойства касательных*



Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Если из точки M проведены к окружности две касательные и A, B - точки касания, то а) $MA = MB$, б) центр окружности лежит на биссектрисе угла AMB.

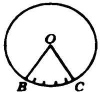
3.2. Измерение углов, связанных с окружностью

3.2.1. *Определения*

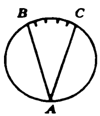
Вписанный угол - угол, образованный двумя хордами AB и AC, выходящими из точки A на окружности.

Центральный угол - угол, образованный двумя радиусами OB и OC (O - центр окружности).

3.2.2. *Вычисление углов*



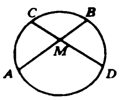
Центральный угол BOC измеряется дугой BC, на которую он опирается.

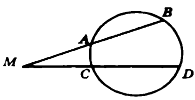


Вписанный угол BAC измеряется половиной дуги BC, на которую он опирается.

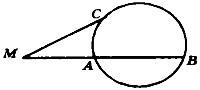
3.3. Метрические соотношения в окружности

Пусть AB и CD - хорды окружности.





Если прямые AB и CD пересекаются в точке M, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.



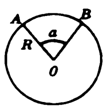
Пусть из внешней точки M к окружности проведены касательная MC (C - точка касания) и секущая MAB (A, B - точки пересечения прямой с окружностью). Тогда $MA \cdot MB = MC^2$.

3.4. Длина окружности, площадь круга

Длина окружности $l = 2\pi r$.

Площадь круга $S = \pi R^2$.

3.5. Длина дуги, площадь сектора



$l_{AB} = R\alpha$;

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} R^2 \alpha,$$

где α - центральный угол, выраженный в радианах; $1^o = \frac{\pi}{180}$ рад.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

1. Основные теоремы, используемые для обоснования чертежа

Если прямая l не принадлежит плоскости α и параллельна некоторой прямой, принадлежащей плоскости α, то $l \parallel \alpha$ ***(признак параллельности прямой и плоскости)***.

Если плоскость α проходит через прямую l, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β, то линия пересечения плоскостей параллельна прямой l.

Если прямая l перпендикулярна двум непараллельным прямым, принадлежащим плоскости α, то $l \perp \alpha$ ***(признак перпендикулярности прямой и плоскости)***.

Если плоскость α проходит через прямую l, перпендикулярную плоскости β, то $\alpha \perp \beta$ ***(признак перпендикулярности плоскостей)***.

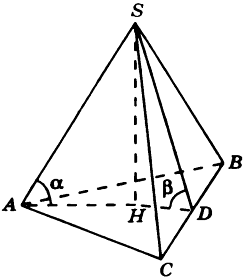
Если две плоскости пересекаются по прямой l и каждая из плоскостей перпендикулярна третьей плоскости α, то $l \perp \alpha$.

Прямая l, принадлежащая плоскости α, перпендикулярна прямой m тогда и только тогда, когда прямая l перпендикулярна проекции прямой m на плоскость α ***(теорема о трех перпендикулярах)***.

Если плоскости α и β перпендикулярны и из точки $M \in \alpha$ проведен перпендикуляр l к плоскости β, то $l \subset \alpha$.

2. Пирамида

2.1. Основные компоненты пирамиды



S - вершина пирамиды;

ABC - основание пирамиды;

SH - высота пирамиды ($SH \perp ABC$);

α - угол между боковым ребром AS и плоскостью основания; $\alpha = \angle SAH$.

SD - апофема, $SD \perp BC$; $HD \perp BC$.

β - угол между гранью SBC и плоскостью основания (угол между апофемой и ее проекцией на плоскость основания).

2.2. Четыре случая высоты пирамиды

Если все боковые ребра равнонаклонены к плоскости основания (или, что то же самое, боковые ребра равны), то высота пирамиды проходит через центр описанной около основания окружности.

Если все боковые грани равнонаклонены к плоскости основания (или, что то же самое, апофемы пирамиды равны), то высота пирамиды проходит через центр вписанной в основание окружности.

Если одна боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, то высота пирамиды принадлежит этой боковой грани.

Если две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, то высотой пирамиды является общее боковое ребро этих двух боковых граней.

2.3. Вычисление объема и площади поверхности пирамиды

$V = \frac{1}{3} S_{OCH} H$ - объем пирамиды,

где S_{OCH} - площадь основания; H - высота пирамиды.

$S_6 = \frac{S_{OCH}}{\cos\alpha}$ - площадь боковой поверхности пирамиды, если все боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания угол α.

3. Призма

3.1. Определения

Если две параллельные плоскости α и α' пересечены рядом параллельных друг другу прямых $A_1A_1', A_2A_2', \ldots, A_nA_n'$, причем точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ принадлежат плоскости α, а точки $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ принадлежат плоскости α', то пространственное тело, ограниченное n-угольниками $A_1A_2\ldots A_n$; $A_1'A_2'\ldots A_n'$ и отрезками $A_1A_1', A_2A_2', \ldots, A_nA_n'$ называется ***призмой***; многоугольники $A_1A_2\ldots A_n$ $A_1'A_2'\ldots A_n'$ - основания призмы, $A_1A_1', A_2A_2', \ldots, A_nA_n'$ - боковые ребра.

Если боковое ребро призмы перпендикулярно плоскостям ее оснований, то призма называется ***прямой***, в противном случае - ***наклонной***.

Если основание призмы - прямоугольник, то призма называется ***параллелепипедом***; если к тому же призма прямая, то параллелепипед называется ***прямоугольным***.

Высотой призмы называется расстояние между ее основаниями.

3.2. Вычисление объема и площади поверхности прямой призмы

$V = S_{OCH}H$ - объем призмы,

где S_{OCH} - площадь основания; H - высота призмы.

$S_6 = PH$ - площадь боковой поверхности,

где P - периметр основания.

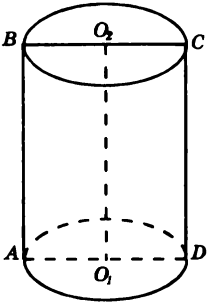
4. Круглые тела

4.1. Цилиндр

Цилиндр - это пространственное тело, образованное вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг его оси симметрии O_1O_2.

Основания - окружности с центрами O_1, O_2.

AB, CD - образующие, они перпендикулярны плоскостям оснований.



$ABCD$ - осевое сечение; O_1O_2 - ось симметрии цилиндра.

$V = \pi R^2 H$,

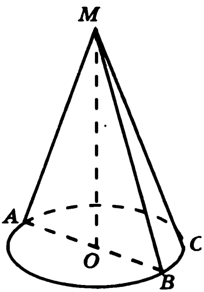
где R - радиус основания; H образующая.

$S_б = 2\pi RH$. $S = 2\pi R(H + R)$.

4.2. Конус

Конус - это пространственное тело, образованное вращением равнобедренного треугольника AMB ($AM = MB$) вокруг его оси симметрии MO.

Основание - окружность с центром в точке O.



M - вершина конуса.

MO - высота; MO перпендикулярна плоскости основания. MO - ось симметрии конуса.

MA, MB, MC - образующие.

AMB - осевое сечение.

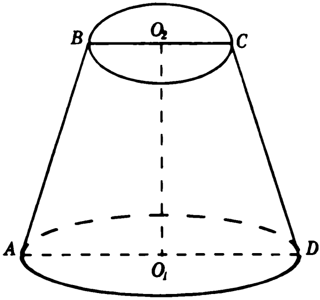
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$,

где $R -$ радиус основания; $H -$ высота.

$S_б = \pi Rl$, где l - образующая конуса.

$S = \pi R(R + l)$.

4.3. Усеченный конус



Усеченный конус - это пространственное тело, образованное вращением равнобокой трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$, $AB = CD$) вокруг ее оси симметрии O_1O_2.

Основания - окружности с центрами O_1, O_2.

AB, CD - образующие.

O_1O_2 - высота, O_1O_2 - перпендикулярна плоскостям оснований,

O_1O_2 - ось симметрии усеченного конуса.

$ABCD$ - осевое сечение.

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2),$$

где H - высота; R_1, R_2 - радиусы оснований.

$$S_б = \pi l(R_1 + R_2),$$

где l - образующая.

$$S = \pi(lR_1 + lR_2 + R_1^2 + R_2^2).$$

4.4. Шар

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $S = 4\pi R^2$, где R - радиус шара.

5. Описанные шары

5.1. Шар и пирамида

Около пирамиды можно описать шар тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.

Чтобы построить центр O этого шара, нужно:

1. Найти центр O_1 окружности, описанной около основания.

2. Через точку O_1 провести прямую, перпендикулярную плоскости основания.

3. Через середину любого бокового ребра пирамиды провести плоскость, перпендикулярную этому ребру.

4. Найти точку O пересечения построенных прямой и плоскости.

Частный случай: боковые ребра пирамиды равны. Тогда:

шар описать можно;

центр O шара лежит на высоте пирамиды;

$R = \dfrac{b^2}{2H}$, где R - радиус описанного шара; b - боковое ребро;

H - высота пирамиды.

5.2. Шар и призма

Около призмы можно описать шар тогда и только тогда, когда призма прямая и около ее основания можно описать окружность.

Центром шара служит середина отрезка, соединяющего центры описанных около оснований окружностей.

$$R = \sqrt{r^2 + \frac{H^2}{4}},$$

где R - радиус описанного шара; r - радиус описанной около основания окружности; H - высота призмы.

5.3. Шар и цилиндр

Около цилиндра шар можно описать всегда. Центром шара служит центр симметрии осевого сечения цилиндра.

5.4. Шар и конус

Около конуса шар можно описать всегда. Центром шара служит центр окружности, описанной около осевого сечения конуса.

$$R = \frac{l^2}{2H},$$

где R - радиус шара; l - образующая; H - высота конуса.

5.5. Шар и усеченный конус

Около усеченного конуса шар можно описать всегда. Центром шара служит центр окружности, описанной около осевого сечения конуса.

6. Вписанные шары

6.1. Шар и пирамида

Центр вписанного шара - точка пересечения биссекторных плоскостей, построенных для всех имеющихся в пирамиде двугранных углов; если эти биссекторные плоскости не имеют общей точки, то шар вписать нельзя.

Частный случай: боковые грани пирамиды равнонаклонены к плоскости основания. Тогда:

шар вписать можно;

центр O шара лежит на высоте пирамиды, конкретнее - это точка пересечения высоты с биссектрисой угла между апофемой и проекцией этой апофемы на плоскость основания.

6.2. Шар и прямая призма

В прямую призму можно вписать шар тогда и только тогда, когда:

в основание призмы можно вписать окружность,

диаметр этой окружности равен высоте призмы.

Центром шара служит середина отрезка, соединяющего центры вписанных в основания окружностей.

$$r = R = \frac{1}{2}H,$$

где r - радиус вписанного шара; R - радиус вписанной в основание окружности; H - высота призмы.

6.3. Шар и цилиндр

В цилиндр можно вписать шар тогда и только тогда, когда осевое сечение цилиндра - квадрат (такой цилиндр иногда называют равносторонним). Центром шара служит центр симметрии осевого сечения цилиндра.

6.4. Шар и конус

В конус можно вписать шар всегда. Центром шара служит центр окружности, вписанной в осевое сечение конуса.

6.5. Шар и усеченный конус

В усеченный конус можно вписать шар тогда и только тогда, когда $R_1 + R_2 = l$,

где R_1, R_2 - радиусы оснований; l - образующая.

Центром шара служит середина отрезка, соединяющего центры оснований.

$$r = \frac{1}{2}H,$$

где r - радиус вписанного шара; H - высота усеченного конуса.

Оглавление