

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**СТАРООСКОЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. А.А. УГАРОВА (филиал) федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский технологический университет
«МИСИС»**

Р.Р. Мухин

Функции нескольких переменных

Учебное пособие

Старый Оскол

2025

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**СТАРООСКОЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. А.А. УГАРОВА (филиал) федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский технологический университет
«МИСИС»**

Р.Р. Мухин

Функции нескольких переменных

Одобрено редакционно-издательским советом
СТИ НИТУ «МИСИС» в качестве учебного пособия
для студентов очной, очно-заочной и заочной
форм обучения

Старый Оскол

2025

УДК 517
ББК 22.161.1
М925

Составитель: д.-ф-м.н., доцент Мухин Р.Р.

Рецензент: д.т.н., доцент Кабулова Е.Г.

Мухин Р.Р.

М925 Функции нескольких переменных. Учебное пособие. – Старый Оскол: СТИ НИТУ «МИСИС», 2025. – 26 с.

Настоящее пособие не может заменить учебника математического анализа по разделу “Функции нескольких переменных”, где весь материал излагается последовательно и достаточной полнотой. Цель пособия совершенно иная. Оно предназначено для тех, кто ознакомился с соответствующим разделом учебника, но испытывает затруднения при решении задач.

Пособие построено по следующей схеме: сначала приводятся основные понятия и формулы, затем даются подробные решения типовых задач.

УДК 517
ББК 22.161.1

Введение

Функции одной независимой переменной охватывают относительно узкий класс зависимостей, существующих в природе, эти зависимости намного шире и разнообразнее. Поэтому возникает задача расширения понятия функции на случай большего числа переменных.

При этом появляется много новых моментов. Поскольку все важнейшие факты функций нескольких переменных проявляются уже в случае двух переменных, в дальнейшем ограничимся рассмотрением функций от двух переменных.

Функции двух переменных. Предел. Непрерывность.

Дадим следующее определение **функции от двух переменных**:

Рассмотрим множество E упорядоченных пар чисел. Если по какому-нибудь закону каждой паре $(x, y) \in E$ приведено в соответствие число z , то на множестве E определена функция $z = f(x, y)$ от двух переменных x и y .

Поскольку каждой паре чисел (x, y) соответствует на плоскости точка с координатами (x, y) , то функция $f(x, y)$ задана на множестве E точек плоскости. Функцию двух переменных $f(x, y)$ геометрически можно представить как уравнение поверхности в трехмерном пространстве (Рис. 1)

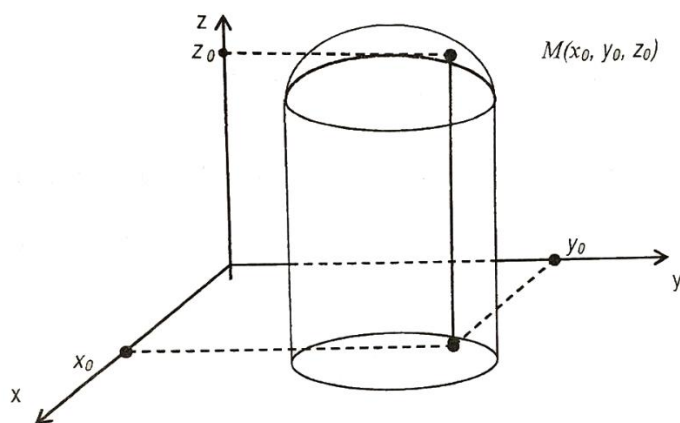


Рис. 1

При установлении вида поверхности $z = f(x, y)$ для наглядности стоят серию кривых, представляющих сечения поверхности плоскостями, параллельными плоскости xOy . Полагая $z = C$, получим уравнение $f(x, y) = C$, определяющее множество точек, по которому горизонтальная плоскость $z = C$ пересекает поверхность $z = f(x, y)$. Линии $f(x, y) = C$ называются линиями уровня. Семейство линий уровня позволяет получить представление о поверхности (Рис. 2)

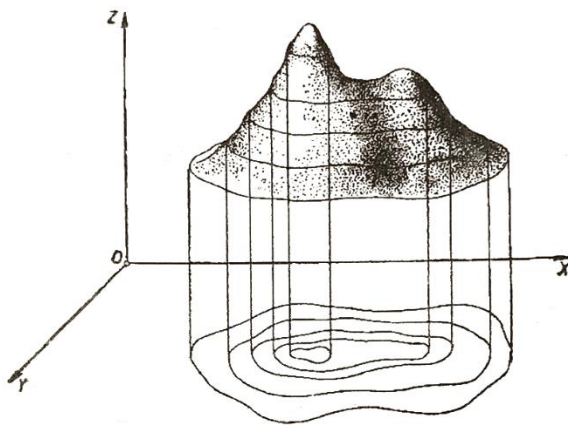


Рис. 2

Пример

Для функции $z = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}$ линиями уровня $z = C$ являются эллипсы $2x^2 + 3y^2 = \frac{1}{C}$ > 0 . По этим эллипсам горизонтальные плоскости пересекают поверхность (Рис. 3)

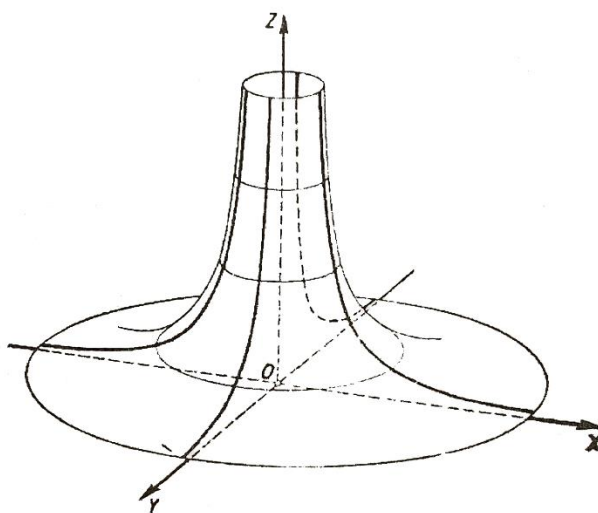


Рис. 3

Перейдем к понятию предела функции. Для этого нам понадобится понятие окрестности точки. Множество всех точек $M(x,y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

называется δ -окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$, т.е. δ -окрестность точки M_0 представляет все внутренние точки круга радиуса δ с центром в точке M_0 (Рис. 4).

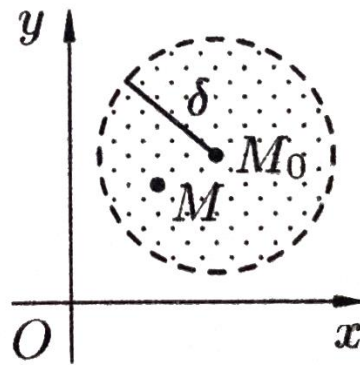


Рис. 4

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ (сама точка M_0 в это множество может и не входить).

Определение:

Число A называется **пределом функции** $z = f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ (или, что то же самое $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех x, y , удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, т.е.

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

Примеры.

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 3, y \rightarrow 0} \frac{tg(xy)}{y} &= \lim_{x \rightarrow 3} x \lim_{y \rightarrow 0} \frac{tg(xy)}{xy} = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 3, y \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 3, y \rightarrow 0} \cos(xy)} = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

2) Для функций нескольких переменных положение с пределами более сложное, чем в случае функции одной переменной. При вычислении предела функции двух переменных, сводя его к вычислению повторного предела, результат может

зависеть от порядка следования пределов, как это видно из следующего примера. Для функции

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \text{ имеем } \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y}) = 1, \text{ но } \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y}) = -1$$

Определение:

Функция $f(M)$, определенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ называется непрерывной в точке M_0 , если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$$

Функция $f(M)$, непрерывная в каждой точке области G , называется непрерывной в области G .

Примеры.

- 1) Функция $f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ непрерывна во всей плоскости;
- 2) Функция $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$ разрывна на линии $x = y$;
- 3) Функции $\ln(x^2 - y^2)$, $\operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}$ непрерывны в своей области определения.

Частные производные.

Перейдем к понятию производной. Поскольку аргументы x и y являются независимыми, функцию $f(x,y)$ можно дифференцировать по каждому из аргументов, и таким образом, для функции двух переменных существуют две разные производные. Эти производные называются частными производными.

Определение:

Если функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \text{ их называют}$$

частными производными функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменным x и y и обозначают

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \text{ или } f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0).$$

Для вычисления частных производных используются правила и формулы дифференцирования функции одной переменной, считая другую переменную фиксированной.

Примеры:

$$f(x,y) = 3x + y^2 + \ln(x + y^2)$$

функция определена в области $y^2 > -x$. Фиксируя переменную y , находим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 + \frac{1}{x + y^2}$$

Фиксируя переменную x , получаем $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \frac{2y}{x + y^2}$

$$2) f(x,y) = e^{\arctg \frac{y}{x}}$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\arctg \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} e^{\arctg \frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\arctg \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} e^{\arctg \frac{y}{x}}$$

Частные производные функции $z=f(x,y)$ имеют следующую геометрическую интерпретацию: в данной точке $N(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} = \operatorname{tg} \beta,$$

где α – угол между осью Ox и касательной в точке N к линии пресечения поверхности $z=f(x,y)$ и плоскости $y=y_0$, β – угол между осью Oy и касательной в той же точке к линии пересечения данной поверхности с плоскостью $x=x_0$ (Рис. 5)

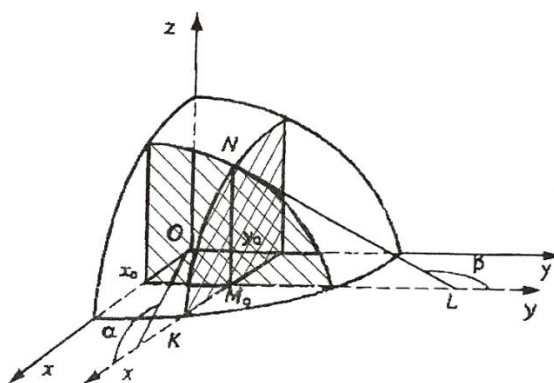


Рис. 5

Дифференциал функции нескольких переменных.

Напомним, что для функции одной переменной $y(x)$ малое изменение Δx переменной x приводило к малому изменению Δy функции y :

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \approx y'(x)dx = dy$$

Здесь сложная величина приращения Δy заменена на более простую величину дифференциал dy . При этом мы пренебрегаем членами более высокого порядка малости $(dx)^2$ по сравнению с величинами dx .

Для случая функции двух переменных $f(x,y)$ функция изменяется в результате изменения обеих переменных x и y

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Перепишем это выражение в следующем виде:

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Рассмотрим разность двух последних членов $f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. При каждом фиксированном y эту разность можно заменить на дифференциал функции, зависящей только от x :

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Точно так же получим

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Здесь мы пренебрегли членами порядка $(dx)^2$, $(dy)^2$, $dx dy$. Тогда приращение функции Δf можно приближенно заменить дифференциалом df

$$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (1)$$

Примеры:

1) Найти дифференциал функции $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + x^3y$

Находим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 6xy^2 + 3x^2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x^2y + x^3$$

Подставляя эти выражения в формулу (1), находим дифференциал функции $f(x,y)$

$$df = x(8x^2 - 6y^2 + 3xy) dx + x^2(-6y + x) dy$$

$$2) f(x,y) = 1 + \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$$

Находим аналогично

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y \cos xy \cdot (x^2 + y^2) - \sin xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x \cos xy \cdot (x^2 + y^2) - \sin xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$df = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} [y(x^2 + y^2) \cos xy - 2x \sin xy] dx + \\ + \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} [x(x^2 + y^2) \cos xy - 2y \sin xy] dy$$

Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Для функции двух переменных $f(x,y)$ ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ сами являются функциями двух переменных x и y , и для этих функций также можно найти частные производные. Их называют частными производными второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy},$$

Кроме того, существуют еще две частные производные второго порядка по смешанным переменным:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$

Аналогично можно найти частные производные третьего и более высокого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f'''_{xyy}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = f'''_{xyx} \text{ и т.д.}$$

Существенную роль в дифференциальном исчислении функций нескольких переменных играет следующая **Теорема**:

Если две смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, непрерывны в некоторой точке, то их значения в этой точке совпадают.

Таким образом, при выполнении условий этой теоремы имеем для частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (2)$$

Примеры:

1) $f(x,y) = x^4y + xy^4 - 3xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y + y^4 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^4 + 4xy^3 - 3x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4x^3 + 4y^3 - 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x^3 + 4y^3 - 3. \text{ Как видим, выполняется соотношение (2)}$$

2) $f(x,y) = e^{xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} = (1 + xy)e^{xy}$$

3) Вычислить частные производные второго порядка функции $f(x,y)$ в заданной точке

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y), \quad M_0(0,1)$$

Найдем сначала частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y} = (x^2+y)^{-1}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y)^2} = \frac{2x^2+2y-4x^2}{(x^2+y)^2} \\ &= -\frac{2(y-2x^2)}{(x^2+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{(x^2+y)^2} \end{aligned}$$

Подставляем в полученные выражения значения x и y в данной точке $M_0(0,1)$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \Big|_{0,1} = \frac{2 \cdot 1 - 0}{(0+1)^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \Big|_{0,1} = -\frac{1}{(0+1)^2} = -1, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \Big|_{0,1} = 0$$

Дифференциал от дифференциала функции $f(x,y)$ называется **вторым дифференциалом** этой функции. Таким образом, по определению

$$\begin{aligned} d^2f &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dydx + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2, \end{aligned}$$

или, учитывая равенство (2) для смешанных производных, получим

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \quad (3)$$

Примеры:

1) Найти второй дифференциал функции $f(x,y) = xe^y$

Находим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y$$

и подставим значения вторых производных в формулу (3)

$$d^2f = 2xe^y dx dy + xe^y dy^2$$

2) Найти второй дифференциал функции $f(x,y)$ в точке $M_0(0,0)$

$$f(x,y) = 4y^2 + \sin^2(x-y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2\sin(x-y)\cos(x-y) = \sin 2(x-y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 8y + 2\sin(x-y)\cos(x-y)(-1) = 8y - \sin 2(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2\cos 2(x-y), \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -2\cos 2(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 8 - 2\cos 2(x-y)(-1) = 8 + 2\cos 2(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \Big|_{0,0} = 2, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \Big|_{0,0} = -2, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \Big|_{0,0} = 8 + 2 = 10$$

Второй дифференциал в заданной точке M_0 будет равен

$$d^2f = 2dx^2 - 4dx dy + 10dy^2$$

Частные производные сложных функций.

Пусть функция двух переменных $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются аргументами функции $f(u(x,y), v(x,y))$. Функция f является **сложной функцией** от (x,y) .

Если функция $f(u,v)$ дифференцируема в точке (u_0, v_0) и если в точке (x_0, y_0) существуют производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y},$$

то в точке (x_0, y_0) существуют производные сложной функции $f(u(x,y), v(x,y))$, при этом

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4)$$

Пример:

Пусть $f(u,v)$ – дифференцируемая функция, $u = xy$, $v = x^2 - y^2$. Найти частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

По формулам (4) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} y + \frac{\partial f}{\partial v} 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} x - \frac{\partial f}{\partial v} 2y$$

Производная по направлению.

Для общности будем рассматривать функцию трех переменных $u = f(x,y,z)$, где z – еще одна независимая переменная. Частная производная выражает скорость изменения функции в соответствующем направлении. Например, для функции двух переменных производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ показывает скорость изменения функции $z(x,y)$ в направлении координаты x . Обобщим задачу и рассмотрим вопрос о скорости изменения функции в любом направлении. Обратимся к рисунку 6.

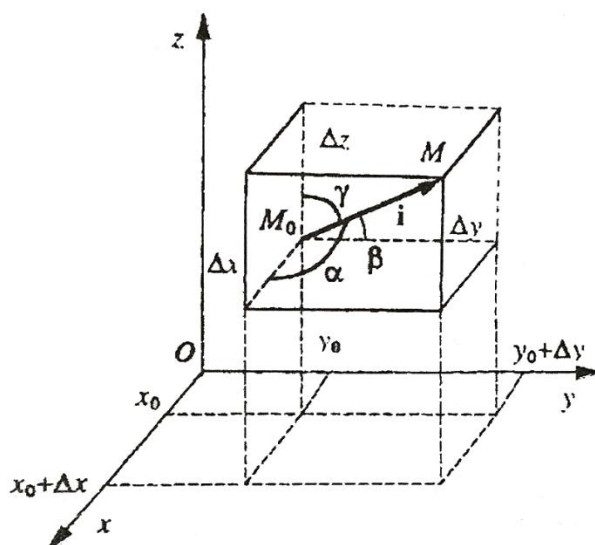


Рис. 6

Точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ соединим вектором $\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \mathbf{I}$, образующим с координатными осями углы α, β, γ (Рис. 6).

$\mathbf{I} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - u(x_0, y_0, z_0)$ – приращение функции.

Предел отношения

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma = \frac{\partial u}{\partial l}$$

называется **производной по направлению $\mathbf{I}$** функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пример:

Найти производную функции $u = x^2 - 2y^2 + 3z^2$ по направлению вектора $\mathbf{I} = (1, 2, -2)$ и ее значение в точке $M_0(9, 6, -1)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 6z, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2x \cdot \frac{1}{3} + (-4y) \cdot \frac{2}{3} + 6z \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}y - 4z$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{2}{3} \cdot 9 - \frac{8}{3} \cdot 6 + 4 = -6$$

Частная производная функции нескольких переменных является частным случаем производной по направлению. Например, если

$$\mathbf{I} = (1, 0, 0), \quad \alpha = 0, \quad \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Градиент.

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ называется вектор с координатами $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ и обозначается gradu

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные орты. Производная функции по направлению и градиент этой функции связаны между собой: производная по направлению $\mathbf{I}$ функции $u = f(x, y, z)$ равна проекции градиента этой функции на вектор $\mathbf{I}$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{gradu}| \cos \varphi,$$

где φ - угол между векторами gradu и $\mathbf{l}$.

Производная функции в точке по направлению вектора $\mathbf{l}$ имеет наибольшее значение, если направление $\mathbf{l}$ связано с направлением градиента данной функции. Это наибольшее значение равно модулю вектора gradu

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{\max} = |\text{gradu}| |\cos 0| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \quad (5)$$

Примеры:

1) Найти градиент функции $f(x,y) = 1 + x^2y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 \quad \text{grad}f = 2xy^3\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j}$$

2) Найти градиент функции $u = f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ в точке $M_0(1,2,3)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = -\frac{1}{(1+4+9)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{14\sqrt{14}}, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = -\frac{2}{14\sqrt{14}}, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = -\frac{3}{14\sqrt{14}}$$

$$\text{gradu} = -\frac{1}{14\sqrt{14}} (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

Экстремум функций двух переменных.

Понятие экстремума функции двух переменных (максимума или минимума) аналогично соответствующему понятию функции одной переменной, но алгоритм исследования на экстремум несколько усложняется. Рассмотрим условия существования экстремума функции.

Необходимое условие экстремума:

если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума функции $z = f(x, y)$ и частные производные

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ существуют в точке $M_0(x_0, y_0)$, то они равны нулю в этой точке, т.е.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Точки, координаты которых удовлетворяют этой системе, называются стационарными точками функции $z = f(x, y)$. Точки экстремуму следует искать только среди ее стационарных точек.

Достаточное условие экстремума:

Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$. Тогда эта точка $M_0(x_0, y_0)$:

1) является точкой строгого минимума, если в этой точке

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0;$$

2) является точкой строгого максимума, если в этой точке

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0;$$

3) не является точкой экстремума, если в этой точке

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} < 0$$

Примеры:

Исследовать на экстремум функцию $z = f(x, y)$

$$1) z = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$$

Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 36$$

Согласно необходимым условиям экстремума получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0 \\ 6xy - 36 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Решив эту систему, находим все стационарные точки: (3,2), (-3,-2), (2,3), (-2,-3). Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

и находим величины Δ_1 и Δ_2

$$\Delta_1 = 6x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & 6x \\ 6x & 6x \end{vmatrix} = 36(x^2 - y^2)$$

В точке (3,2) $\Delta_1 = 18 > 0$, $\Delta_2 = 36(9 - 4) = 180 > 0$, следовательно, в этой точке функция имеет локальный минимум $z(3,2) = -100$. В точке (-3,-2) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 = 180 > 0$, в этой точке локальный максимум $z(-3,-2) = 152$.

В точках (2,3) и (-2,-3) $\Delta_2 = -180 < 0$, поэтому в этих стационарных точках экстремума нет.

$$2) z = x^3 + y^3 + 9xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 9y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 9x$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 9y = 0 \\ 3y^2 + 9x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 3y = 0 \\ y^2 + 3x = 0 \end{cases}$$

Определяя y из первого уравнения и подставляя выражение $y = -\frac{1}{3}x^2$ во второе уравнение, получим:

$$\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^2 + 3x = 0, \quad x^4 + 27x = 0, \text{ или, разлагая на множители, } x(x^3 + 27) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3$$

Комплексные корни уравнения $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$ не принимаем во внимание. Итак, имеем две стационарные точки (0,0), (-3,-3).

Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

В точке (0,0) $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = -81 < 0$ – нет экстремума. В точке (-3,-3)

$\Delta_1 = -18$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -18 & 9 \\ 9 & -18 \end{vmatrix} = 81 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 81(4 - 1) > 0$ функция имеет максимум $z(-3,-3) = 27$.

Наибольшее и наименьшее значения функции.

Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области достигает в ней наибольшего и наименьшего значений или в стационарных точках, или в точках на границе области.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции нужно:

- 1) Найти стационарные точки внутри области и вычислить в них значения функции;
- 2) Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области;
- 3) Из всех полученных значений функции выбрать самое большое (самое меньшее) значение, которое и будет решением задачи.

Примеры:

- 1) Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = 2x^2 - 2y^2 \text{ в круге } x^2 + y^2 \leq 9$$

Для нахождения стационарных точек вычислим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4y$$

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ -4y = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $(0,0)$, в этой точке функция $z_0 = f(0,0) = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$. Границей области является окружность

$x^2 + y^2 = 9$ или $y^2 = 9 - x^2$, на которой $-3 \leq x \leq 3$. Функция $z = 2x^2 - 2y^2$ на границе области становится функцией одной переменной x :

$$z(x) = 2x^2 - 2(9 - x^2) = 4x^2 - 18, \quad -3 \leq x \leq 3$$

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $z(x)$ на отрезке $[-3, 3]$

$z'(x) = 8x$. Из уравнения $z'(x) = 0$ находим единственную стационарную точку $x = 0$. В этой точке $z_1 = z(0) = -18$. Вычислим значение функции $z(x)$ на концах отрезка $[-3, 3]$

$$z_2 = z(-3) = 4 \cdot (-3)^2 - 18 = 18, \quad z_3 = z(3) = 4 \cdot 3^2 - 18 = 18$$

Сравнивая между собой числа z_1, z_2, z_3 заключаем, что функция $z = f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ имеет наибольшее значение, равное 18 и наименьшее значение, равное -18, причем

$$z_{\text{наиб.}} = f(-3, 0) = f(3, 0) = 18$$

$$z_{\text{наим.}} = f(0, -3) = f(0, 3) = -18$$

2) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$ в прямоугольнике с вершинами $A(-3, -3), B(-3, 2), C(1, 2), D(1, -3)$ (Рис. 7).

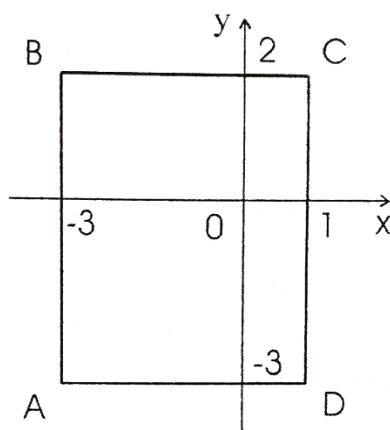


Рис. 7

Находим частные производные функции $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 6x$$

Из решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ 3y^2 + 6x = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ y^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

находим две стационарные точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(-2, -2)$, обе лежащие внутри прямоугольника

ABCD. Значения функции в этих точках будут $z_1 = f(0, 0) = 0$, $z_2 = f(-2, -2) = 8$.

Перейдем к рассмотрению границы прямоугольника ABCD (Рис. 7). Эта граница состоит из четырех отрезков AB, BC, CD, DA, на каждом из которых

могут быть свои стационарные точки. Рассмотрим отрезок АВ, уравнение которого $x = -3$, причем $-3 \leq y \leq 2$.

На этом отрезке функция z будет функцией одной переменной y :

$$z = f(-3, y) = -27 + y^3 - 18y, \quad z(y) = y^3 - 18y - 27$$

Для исследования этой функции на экстремум находим ее производную и приравниваем ее нулю

$$z'(y) = 3y^2 - 18 = 0$$

$$y^2 = 6, \quad y = -\sqrt{6} \approx -2.45, \quad y = \sqrt{6} \approx 2.45$$

Второе значение не принадлежит отрезку $[-3, 2]$ и его рассматривать не будем.

Найдем значение функции $f(y)$ при $y = -\sqrt{6}$:

$$z_3 = z(-\sqrt{6}) = (-\sqrt{6})^3 - 18(-\sqrt{6}) - 27 = 12\sqrt{6} - 27 \approx 2.4$$

На отрезке ВС $y = 2$, $-3 \leq x \leq 1$ и $z = f(x, 2) = x^3 + 8 + 12x$. Производная этой функции

$$z'(x) = 3x^2 + 12 \neq 0, \text{ у функции } z(x) = x^3 + 12x + 8 \text{ нет стационарных точек.}$$

$$\text{На отрезке CD } x = 1, \quad -3 \leq y \leq 2, \quad z = f(1, y) = y^3 + 6y + 1$$

Производная $z'(y) = 3y^2 + 6 \neq 0$, также нет стационарных точек.

На отрезке DA $y = -3$, $-3 \leq x \leq 1$, $z'(x) = 3x^2 - 18 = 0$, $x = -\sqrt{6}$ и $x = \sqrt{6}$, последняя точка отрезку $[-3, 1]$ не принадлежит, следовательно, остается только одна стационарная точка $x = -\sqrt{6}$. Отсюда находим

$$z_4 = z(-\sqrt{6}) = (-\sqrt{6})^3 - 18(-\sqrt{6}) - 27 \approx 2.4$$

Осталось найти значения функции $z = f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$ в вершинах А, В, С, D.

$$z_5 = f(A) = f(-3, -3) = (-3)^3 + (-3)^3 + 6(-3)(-3) = 0$$

$$z_6 = f(B) = f(-3, 2) = (-3)^3 + 2^3 + 6(-3) \cdot 2 = -55$$

$$z_7 = f(C) = f(1, 2) = 1^3 + 2^3 + 6 \cdot 1 \cdot 2 = 21$$

$$z_8 = f(D) = f(1, -3) = 1^3 + (-3)^3 + 6(-3) \cdot 1 = -44$$

Сравнивая $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8$, заключаем, что функция $z = f(x, y) = x^3 + y^3 + 6xy$ в прямоугольнике ABCD достигает наименьшего значения, равного -55, в точке В, и наибольшего значения, равного 21, - в точке С.

2) Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих сумму трех ее сторон, равную a , найти тот, объем которого наибольший.

Обозначим длины ребер параллелепипеда через x, y, z , все они больше нуля. Объем параллелепипеда V

$$V = xyz$$

По условию задачи $x + y + z = a$, $a > 0$, откуда $z = a - x - y$

Поэтому

$$V = xy(a - x - y)$$

Находим частные производные

$$V'_x(x, y) = ay - 2xy - y^2, \quad V'_y(x, y) = ax - x^2 - 2xy,$$

приравняв их нулю, получим систему

$$\begin{cases} ay - 2xy - y^2 = 0 \\ ax - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

Так как $x \neq 0$, $y \neq 0$, то разделив первое уравнение на y , второе на x , получаем:

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ x + 2y = a \end{cases}$$

Решение этой системы дает стационарную точку $x_0 = \frac{a}{3}$, $y_0 = \frac{a}{3}$.

Вычислим в этой точке вторые частные производные:

$$V''_{xx}(x, y) = -2y, \quad V''_{xy}(x, y) = a - 2x - 2y, \quad V''_{yy}(x, y) = -2x$$

$$V''_{xx}(x_0, y_0) = -\frac{2}{3}a, \quad V''_{xy}(x_0, y_0) = a - \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}a = -\frac{1}{3}a, \quad V''_{yy}(x_0, y_0) = -\frac{2}{3}a$$

$$\Delta_1 = -\frac{2}{3}a < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3}a & -\frac{1}{3}a \\ -\frac{1}{3}a & -\frac{2}{3}a \end{vmatrix} = \frac{a^2}{9} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{a^2}{9} (4 - 1) = \frac{a^2}{3} > 0 \quad \text{Точка}$$

$M\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ является точкой максимума. Из уравнения $z = a - x - y$ находим $z_0 = \frac{a}{3}$. Таким образом, $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{a}{3}$, искомый параллелепипед является

кубом с ребром $\frac{a}{3}$ и объемом $V = \frac{a^3}{27}$.

Условный экстремум.

Если требуется найти экстремум функции $z = f(x,y)$ при условии, что переменные x и y связаны соотношением

$$\varphi(x,y) = 0, \quad (6)$$

такой экстремум называется **условным** в отличие от безусловного экстремума, который ранее рассматривался. Соотношение (6) называется **уравнением связи**.

Для нахождения условного экстремума из функций $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ составляют **функцию Лагранжа**

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y),$$

параметр λ называется множителем Лагранжа. **Необходимое условие** условного экстремума дается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Решая систему (7), находим стационарные точки, координаты которых удовлетворяют уравнению связи (6).

Достаточное условие условного экстремума определяется с помощью второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2L(x_0, y_0) = L''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + L''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + L''_{yy}(x_0, y_0)dy^2 \quad (8)$$

Если при выполнении условий

$$d\varphi(x_0, y_0) = \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y} dy = 0 \quad dx^2 + dy^2 > 0 \quad (9)$$

если $dL^2(x_0, y_0)$ является положительно определенной формой, то функция $f(x,y)$ в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет условный минимум; если $dL^2(x_0, y_0)$ отрицательно определена – условный максимум.

Пример:

Исследовать на условный экстремум функцию $z = f(x,y) = 6 - 5x - 4y$ с уравнением связи $\varphi(x,y) = x^2 - y^2 - 9 = 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x,y) = 6 - 5x - 4y + \lambda(x^2 - y^2 - 9)$$

и систему (7)

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -5 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -4 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Решениями системы (10) будут $x = -5, y = 4$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $x = 5, y = -4$ при $\lambda = \frac{1}{2}$.

Таким образом, функция $f(x,y)$ может иметь условный экстремум только в двух точках: $(-5,4)$ и $(5,-4)$. Вычисли второй дифференциал функции Лагранжа:

Так как $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda$, то

$$d^2L = 2\lambda(dx^2 - dy^2)$$

Найдем первый дифференциал функции φ :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 2x dx - 2y dy = 0$$

В точках $(-5,4)$ и $(5,-4)$ дифференциалы dx и dy связаны равенством $5dx + 4dy = 0$ (условие (9)). Отсюда находим

$dy = -\frac{5}{4}dx$ и $d^2L = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left(dx^2 - \frac{25}{16}dx^2\right) = \frac{9}{16}dx^2 > 0$ в точке $(-5,4)$;

$$d^2L = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(dx^2 - \frac{25}{16}dy^2\right) = -\frac{9}{16}dx^2 < 0 \text{ в точке } (5,-4).$$

Следовательно, функция $f(x,y)$ в точке $(-5,4)$ имеет условный минимум $z(-5,4) = 15$, а в точке $(5,-4)$ - условный максимум $z(5,-4) = -3$.

Литература

1. Пантелеева А.В., Савостьянова Н.И., Федорова Н.М. Математический анализ. М.: ИНФРА-М, 2020.
2. Липовцев Ю.В., Третьякова О.Н. Основы высшей математики для инженеров. М.: Вузов. книга, 2018.
3. Савостьянова Н.И., Федорова Н.М. Математический анализ для инженеров и экономистов. М.: Факториал, 2018.
4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. СПб.-М.: Лань, 2005.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1. М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 2004.

Учебное издание

Мухин Равиль Рафкатович

Функции нескольких переменных

Учебное пособие

Технический редактор: Юрина Е.В.

Компьютерный набор: Мухин Р.Р.

Подписано к печати _____ Бумага для множительной техники

Формат _____ Усл. печ. листов _____ Тираж 150 экз. Заказ _____

Отпечатано с авторского оригинала в редакционно-издательском отделе

Старооскольского технологического института им. А.А. Угарова (филиале) НИТУ «МИСИС»

Старый Оскол, микрорайон Макаренко, 40