СТАРООСКОЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(филиал)
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ИНСТИТУТА
СТАЛИ И СПЛАВОВ
(технологического университета)

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Одобрено редакционно-издательским советом
СТИ МИСиС в качестве учебного пособия
для студентов очной, очно-заочной
и заочной форм обучения

Старый Оскол
2004

УДК 517
ББК 22.161.1
М 925

Составитель: Мухин Р.Р.

Рецензент: кандидат технических наук, доцент Казьмин А.В.

Мухин Р.Р. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Учебное пособие. – Старый Оскол: ООО «ТНТ», 2004. - 36 с.
М 925

Настоящее пособие не может заменить учебника математического анализа по разделу "Функции нескольких переменных", где весь материал излагается систематически и последовательно. В пособии нет формулировок теорем и их доказательств, цель здесь совершенно иная. Пособие предназначено для тех, кто прослушал лекции и ознакомился с соответствующим разделом учебника, но испытывает затруднения при решении задач. Пособие построено следующим образом: сначала приводятся основные понятия и формулы, затем даются подробные решения типовых задач.

УДК 517
ББК 22.161.1
М 925

Функции нескольких переменных

Если по какому-то закону каждой паре чисел (x, y) соответствует число z, то задана функция z=f(x, y). Теория функций, зависящих от нескольких переменных, содержит много новых моментов. При этом почти все основные положения проявляются на примере функции двух переменных: z=f(x, y).

Поэтому ограничимся рассмотрением этого случая.

Частные производные

В функции z=f(x, y) x и y являются независимыми, поэтому можно рассматривать изменение x, оставляя y постоянным, и наоборот. Для функции двух переменных можно определить две разные производные. Производная z по x, когда y остаётся постоянной, называется частной производной от z по x и обозначается через $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Точно так же, когда x остаётся постоянным, а изменяется y, для частной производной z по y можно написать

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (2)$$

Для вычисления частных производных используются все формулы и правила дифференцирования функции одной переменной.

Пример. Найти частные производные от:

$$z=x^3+y^3-3xy$$

Рассматривая y как постоянную, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y.$$

Точно так же, рассматривая x как постоянную, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x.$$

Частные производные сложной функции

Если имеется функция $z = f(u, v)$, аргументы которой являются функциями переменных x и y: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, то частные производные сложной функции $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3)$$

Пример.

Преобразовать к полярным координатам выражение

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, рассматривая z как функцию r и φ.

Используем формулы перехода от декартовых координат к полярным $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$

По формулам (3) имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

отсюда $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\varphi}{r};$

аналогично $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{r}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\varphi}{r};$

следовательно

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}$$

После возведения в квадрат и сложения получим:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Дифференциал функции нескольких переменных

Напомним, что для функции одной переменной y(x) малое изменение dx переменной x приводило к малому изменению Δy функции y:

$$\Delta y=y(x+dx)-y(x)\approx y'(x)dx=dy \qquad (4)$$

Здесь сложная величина приращения Δy заменена более простым дифференциалом dy. При этом пренебрегаем членами порядка $(dx)^2$, так как величина dx сама является малой. Для случая функции двух переменных f(x, y) сама функция изменяется в результате изменения обеих переменных x и y

$$\Delta f=f(x+dx,y+dy)-f(x,y) \qquad (5)$$

Перепишем это выражение в следующем виде:

$$\Delta f=f(x+dx,y+dy)-f(x+dx,y)+f(x+dx,y)-f(x,y).$$

Рассмотрим разность двух последних членов f(x+dx,y) - f(x,y). При каждом конкретном, закреплённом y эта разность есть дифференциал функции, зависящей только от x:

$$f(x+dx,y)-f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx \qquad (5а)$$

Здесь мы пренебрегаем членами порядка $(dx)^2$. Точно также, пренебрегая членами порядка $(dy)^2$, получим:

$$f(x+dx,y+dy) - f(x+dx,y)=\frac{\partial f(x+dx,y)}{\partial y}dy. \qquad (5б)$$

Если пренебречь членами порядка $dxdy$, то $\frac{\partial f(x+dx,y)}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ получаем с точностью до величин порядка $(dx)^2$, $(dy)^2$ и $dxdy$, что выражение (5) приблизительно равно сумме величин (5а) и (5б), которая обозначается через df и называется полным дифференциалом функции f:

$$df=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \qquad (6)$$

Примеры. Найти дифференциал функции f(x,y):

а) $f(x,y)=2x^4-3x^2y^2+x^3y$.

Находим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}=8x^3-6xy^2+3x^2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-6x^2y+x^3.$$

Подставляя эти значения в выражение (6), находим полный дифференциал:

$$df = x(8x^2-6y^2+3xy)dx+x^2(-6y+x)dy.$$

б) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y}+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\frac{1}{y}-\frac{y}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\frac{1}{x^2}=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}=-\frac{x}{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\frac{1}{y^2}+\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\frac{1}{x}=-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}=0$$

$df=0$

в) найти в точках (0,1), (1,1) дифференциал функции $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(x^2-y^2)'_x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x(x^2+y^2-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(x^2-y^2)'_y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y(-x^2-y^2-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=-\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{0,1}=0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{0,1}=0, \quad \left.df\right|_{0,1}=0,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{1,1}=\frac{4}{4}=1, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{1,1}=-\frac{4}{4}=-1, \quad \left.df\right|_{1,1}=dx-dy.$$

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Для функции z(x,y) её частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ сами могут зависеть от x и y. Поэтому для них тоже можно найти частные производные. Эти частные производные называются частными производными второго порядка, их частные производные – частными производными третьего порядка и т.д. Из частных производных первого порядка можно образовать следующие частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx},$$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}$. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial yx}$ называются смешанными производными. Можно показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}, \qquad (7)$$

т.е. смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.

Примеры. Найти частные производные второго порядка:

а) $z=f(x,y)=x^4y+xy^4-3xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3y+y^4-3y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^4+4xy^3-3x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12xy^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=4x^3+4y^3-3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3+4y^3-3.$$

Как видим, выполняется соотношение (7)

б) Найти частные производные второго порядка в точке (0,1):

$$z=y^2-y^2e^x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-y^2e^x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y-2ye^x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^2e^x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2-2e^x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2ye^x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2ye^x,\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{0,1}=-1,\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{0,1}=2-2=0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{0,1}=-2.$$

Второй дифференциал определяется как дифференциал от дифференциала первого порядка:

$$d^2z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dydx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Или с учётом равенства (7) получаем:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (8)$$

Примеры:

а) Найти второй дифференциал функции z=x sin² y

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin^2 y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2x\sin y\times\cos y=x\sin 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x\cos 2y.$$

Подставляя найденные вторые частные производные в формулу (8), находим

$$d^2 z = 2\sin 2y dxdy + 2x\cos 2y dy^2.$$

б) Найти в точке (0,0) второй дифференциал функции

$$z = 4y^2 + \sin^2(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\sin(x-y) \times \cos(x-y) = \sin 2(x-y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 8y + 2\sin(x-y)\cos(x-y) \times (-1) = 8y - \sin 2(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\cos 2(x-y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2\cos 2(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 8 - \cos 2(x-y) \times 2 \times (-1) = 8 + 2\cos 2(x-y)$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{0,0} = 2, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{0,0} = -2, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{0,0} = 8 + 2 = 10$$

$$d^2 z = 2dx^2 - 4dxdy + 10dy^2$$

Геометрический смысл функции двух переменных

Функцию двух переменных $z=f(x,y)$ геометрически можно представить как уравнение поверхности, где z-высота, а x и y – координаты точки в горизонтальной плоскости (рис. 1).

На плоском рисунке изобразить поверхность трудно. Поэтому для установления вида поверхности $z = f(x,y)$

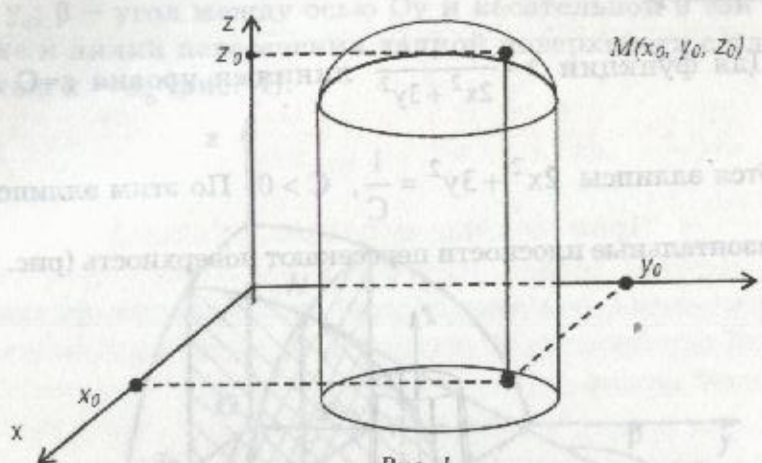

Рис. 1

строят серию кривых, представляющих сечения поверхности плоскостями, параллельными плоскости xOy. Полагая $z = C$, получим уравнение $f(x,y) = C$, определяющее множество точек, по которому горизонтальная плоскость $z = c$ пересекает поверхность. В плоскости xOy это есть уравнение проекции рассматриваемого сечения. Линии $f(x,y) = C$ называются линиями уровня (рис. 2).

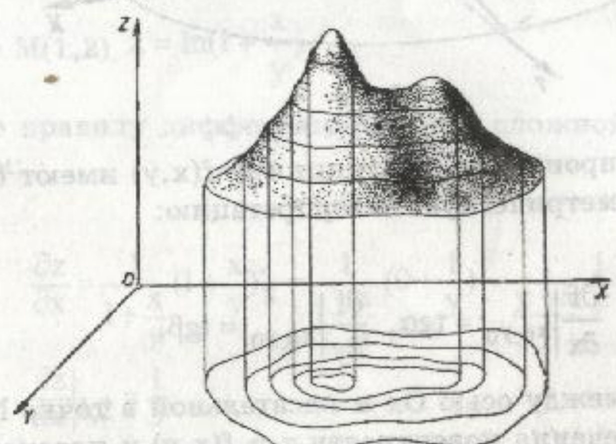

Рис. 2

Пример.

Для функции $z = \dfrac{1}{2x^2 + 3y^2}$ линиями уровня z=C являются эллипсы $2x^2 + 3y^2 = \dfrac{1}{C}$, $C > 0$. По этим эллипсам горизонтальные плоскости пересекают поверхность (рис. 3).

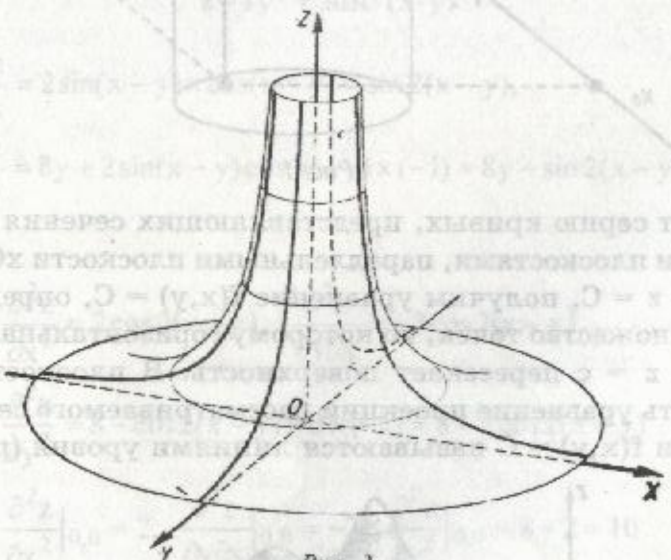

Рис. 3

Частные производные функции z=f(x,y) имеют следующую геометрическую интерпретацию:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x0,y0} = \mathrm{tg}\alpha, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x0,y0} = \mathrm{tg}\beta,$$

где α- угол между осью Ox и касательной в точке N к линии пересечения поверхности z = f(x,y) и плоскости

$y = y_0$; β – угол между осью Oy и касательной в той же точке к линии пересечения данной поверхности с плоскостью $x = x_0$ (рис. 4).

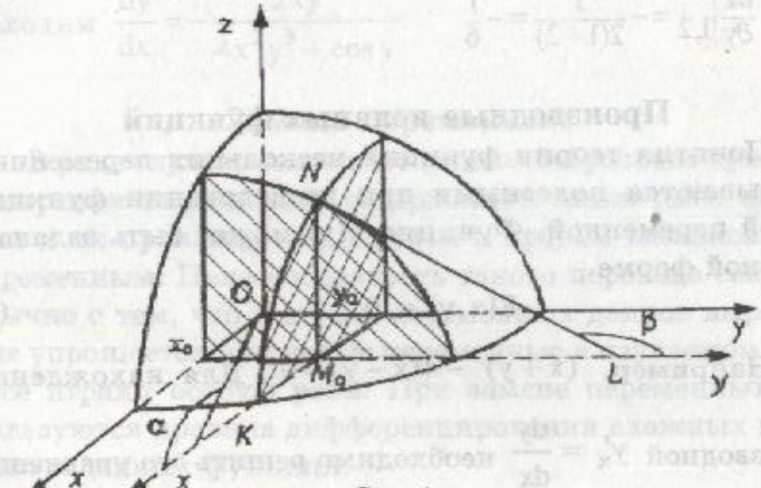

Рис. 4

Пример.

Найти частные производные функции z(x,y) в данной точке M(1,2) $z = \ln(1 + \dfrac{x}{y})$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\frac{x}{y}}\left(0+\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\frac{y+x}{y}}\frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{1,2} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x}{y}}(1+\frac{x}{y})'_y=\frac{1}{1+\frac{x}{y}}(0-\frac{x}{y^2})=-\frac{1}{\frac{y+x}{y}}\frac{x}{y^2}=-\frac{x}{y(x+y)}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{1,2}=-\frac{1}{2(1+2)}=-\frac{1}{6}$$

Производные неявных функций

Понятия теории функций нескольких переменных оказываются полезными при исследовании функций одной переменной. Функция x(y) может быть задана в неявной форме

$$F(x,y) = 0 \qquad (9)$$

Например, $(x+y)^3-4(x-y)=0$. Для нахождения производной $y'_x=\frac{dy}{dx}$ необходимо решить это уравнение относительно y, что в данном случае приводит к громоздкому выражению. Часто решение уравнения (9) относительно y вообще не может быть написано в виде формулы. Производную y'_x можно найти без решения уравнения (9), если воспользоваться частными производными:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \qquad (10)$$

где $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$

Пример.

Найти производную $\frac{dy}{dx}$ для неявно заданной функции $F(x,y)=x^2y^4+\sin y=0$. Частные производные будут

равны $\frac{\partial F}{\partial x}=2xy^4$, $\frac{\partial F}{\partial y}=4x^2y^3+\cos y$. Из формулы (10) находим $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^4}{4x^2y^3+\cos y}$.

Замена переменных

В ряде случаев оказывается целесообразным при рассмотрении выражений, содержащих какие-либо функции и их производные, перейти к другим независимым переменным. Целесообразность такого перехода связана обычно с тем, что в новых переменных данное выражение упрощается или новые переменные в изучаемом вопросе играют особую роль. При замене переменных используются правила дифференцирования сложных и неявно заданных функций.

Пример.

а) Преобразовать уравнение $(x+y)\frac{dz}{dx}-(x-y)\frac{dz}{dy}=0$, принимая u и v за новые независимые переменные:

$$u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\ v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dz}{dv}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\times 2x=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dz}{dv}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}}\,\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2} \times 2y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\,\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Подставляя значения производных в исходное уравнение, получим:

$$(x+y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}\frac{dz}{du} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{dz}{dv}\right) - (x-y)\left(\frac{y}{x^2+y^2}\frac{dz}{du} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{dz}{dv}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\left[x(x+y)\frac{dz}{du} - y(x+y)\frac{dz}{dv} - y(x-y)\frac{dz}{du} - x(x-y)\frac{dz}{dv}\right] =$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\left[\left(x^2+xy-xy+y^2\right)\frac{dz}{du} - \left(xy+y^2+x^2+xy\right)\frac{dz}{dv}\right] =$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\left[\left(x^2+y^2\right)\frac{dz}{du} - \left(x^2+y^2\right)\frac{dz}{dv}\right] =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dz}{du} - \frac{dz}{dv}\right) = 0$$

Окончательно $\frac{dz}{du} - \frac{dz}{dv} = 0$

б) преобразовать выражение $\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}$ к полярным координатам.

Переход от декартовых координат к полярным производится с помощью формул $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$.

При таком переходе $z = f(x,y)$ становится функцией новых независимых переменных

$$z = f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}$$

Эти выражения можно переписать следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x}z = \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)z$$

$$\frac{\partial}{\partial y}z = \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)z$$

Тогда для вторых частных производных, используя выражения для $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$, имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$

$$= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right) - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cos^2\varphi - \frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\varphi}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} -$$

$$- \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi\partial r}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cos^2\varphi - 2\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\varphi}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r} +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r}$$

Аналогично найдём:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2} -$$

$$- \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r},$$

откуда $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r}$.

Производная по направлению

Для общности будем рассматривать функцию трёх переменных $u = f(x,y,z)$, где z – ещё одна независимая переменная. Частная производная выражает скорость изменения функции в соответствующем направлении. Например, производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ показывает скорость изменения функции $z(x,y)$ в направлении координаты x. Обобщим задачу и рассмотрим вопрос о скорости изменения функции в любом направлении. Обратимся к рис. 5.

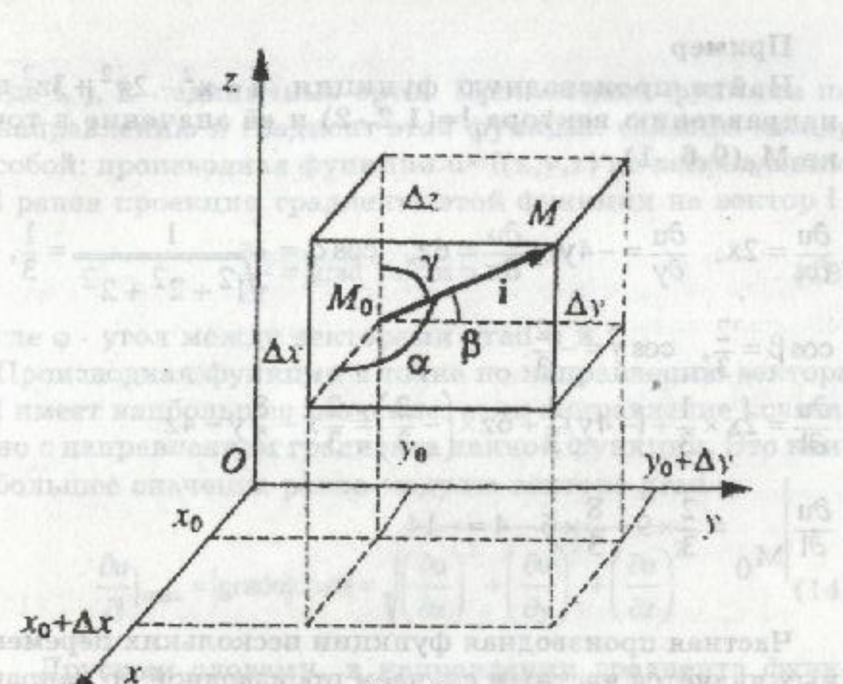

Рис. 5

Точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ соединим вектором $\overline{M_0 M} = \mathbf{l}$ образующим с координатными осями углы α, β, γ (рис.5).

$$\mathbf{l} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad \Delta u = u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - u(x_0, y_0, z_0) \text{ -}$$

приращение функции.

Предел отношения

$$\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta l} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial l} \qquad (11)$$

называется производной по направлению l функции u = f(x,y,z) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пример

Найти производную функции $u = x^2 - 2y^2 + 3z^2$ по направлению вектора **l=(1,2,-2)** и её значение в точке M_0 (9,6,-1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 6z, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{3},$$

$$\cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2x \times \frac{1}{3} + (-4y)\frac{2}{3} + 6z \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}y - 4z$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{2}{3} \times 9 - \frac{8}{3} \times 6 - 4 = -14$$

Частная производная функции нескольких переменных является частным случаем производной по направлению. Например, если

l =i=(1,0,0), т.е. $\alpha = 0, \beta = \gamma = 90^\circ$,

то $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}$

Градиент

Градиентом функции **u = f(x, y, z)** называется вектор с координатами $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ и обозначается grad и

$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (12)$$

где **i, j, k** - единичные орты. Производная функции по направлению и градиент этой функции связаны между собой: производная функции u=f(x,y,z) по направлению **l** равна проекции градиента этой функции на вектор **l**

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad} \ u|\cos\varphi \qquad (13)$$

где φ - угол между векторами grad u и l.

Производная функции в точке по направлению вектора l имеет наибольшее значение, если направление l связано с направлением градиента данной функции. Это наибольшее значение равно модулю вектора grad u

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\max} = |\text{grad}u|\cos 0 = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \qquad (14)$$

Другими словами, в направлении градиента функция u = f(x, y, z) изменяется быстрее, чем в других направлениях.

Примеры.

а) найти градиент функции z = f(x, y), если

$$z = f(x,y) = 1 + x^2y^3 \qquad \text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2$$

$\text{grad}z = 2xy^3\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j}$

б) найти градиент функции u=f(x,y,z) в точке M (1, 2,3),

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M = -\frac{1}{\left(\sqrt{1+4+9}\right)^3} - \frac{1}{14\sqrt{14}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M = -\frac{2}{14\sqrt{14}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M = -\frac{3}{14\sqrt{14}}$$

$$\operatorname{grad} u = -\frac{1}{14\sqrt{14}}(-i+2j+3k)$$

Формула Тейлора

Напомним, что функцию одной переменной f(x) можно разложить в ряд Тейлора по степеням (x-a):

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Аналогично функция двух переменных f (x,y) разлагается в ряд Тейлора по степеням (x – a), (y – b):

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) +$$
$$+\frac{1}{2}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + \ldots \quad (15)$$

Члены более высокого порядка используются редко, поэтому они не выписаны. В частном случае при a = b= 0 получаем ряд Маклорена:

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y +$$
$$+\frac{1}{2}\left[f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2\right] + \ldots \quad (16)$$

Примеры.

а) Разложить функцию f(x,y) в ряд Тейлора:

$$f(x,y) = \sin x \sin y,\ a = b = \frac{\pi}{4}$$

$$f'_x(x,y) = \cos x \times \sin y,\ f'_y(x,y) = \sin x \times \cos y,\ f''_{xx}(x,y) = -\sin x \times \sin y,$$

$$f''_{xy}(x,y) = \cos x \times \cos y,\ f''_{yy}(x,y) = -\sin x \times \sin y,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \times \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},\ f'_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},\ f'_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

$$f''_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2},\ f''_{xy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},\ f''_{yy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

Подставляя полученные выражение в формулу (15), находим:

$$\sin x \times \sin y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)\right] -$$
$$-\frac{1}{4}\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2\right] + \ldots$$

б) Разложить по формуле Маклорена функцию

$$f(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{(1-x)^2(1-y)},\ f'_y(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)^2},$$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{2}{(1-x)^3(1-y)},\ f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{(1-x)^2(1-y)^2},$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{2}{(1-x)(1-y)^3},\ f(0,0) = 1,\ f'_x(0,0) = 1,\ f'_y(0,0) = 1,$$

$$f''_{xx}(0,0) = 2,\ f''_{xy}(0,0) = 1,\ f''_{yy}(0,0) = 2$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} = 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + \ldots$$

Экстремум функции двух переменных

Полученные выше формулы можно использовать для исследования функций на экстремум (минимум или максимум). Если точка $M_0(x_0,y_0)$ является точкой экстремума функции z=f(x,y), то частные производные в точке M_0 $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ либо равны нулю, либо не существуют. Итак, **необходимое условие экстремума**: если у функции z = f(x, y) в точке экстремума существуют частные производные по обеим переменным, то обе они равны нулю в этой точке:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Точки, координаты которых удовлетворяют системе (17) называют стационарными точками функции z. Точки экстремума следует искать только среди её стационарных точек.

Достаточные условия экстремума можно сформулировать следующим образом. Определим следующие величины:

$$\Delta_1 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}, \quad \Delta_2 = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}\right|_{M_0} \qquad (18)$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$:

1) является точкой строгого минимума, если $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$

2) строгого максимума, если $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$

3) не является точкой экстремума, если в этой точке $\Delta_2 < 0$

Примеры.

Исследовать на экстремум функцию $z = f(x,y)$

а) $z = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$

Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 36$$

Согласно необходимым условиям экстремума (17) получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 39 = 0 \\ 6xy - 36 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Решив эту систему, находим все стационарные точки: (3,2); (-3,-2); (2,3); (-2,-3). Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

Подставляя эти выражения в формулы (18), получаем:

$$\Delta_1 = 6x, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36\left(x^2 - y^2\right)$$

В точке (3, 2) $\Delta_1 = 18 > 0, \Delta_2 = 36(9-4) = 180 > 0$ **, следовательно, в этой точке функция имеет минимум z(3,2) = -100.**

В точке (-3 -2) $\Delta_1 = -18 < 0, \Delta_2 = 180 > 0$ **, в этой точке максимум, z(-3,-2) = 152. В точках (2,3) и (-2,-3)** $\Delta_2 = -180 < 0$**, поэтому в этих стационарных точках экстремума нет.**

б) $z = x^3 + y^3 + 9xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 9y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 9x$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 9y = 0 \\ 3y^2 + 9x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 3y = 0 \\ y^2 + 3x = 0 \end{cases}$$

Определяя y из первого уравнения и подставляя его выражение $y = -\frac{1}{3}x^2$ **во второе уравнение, получим:**

$$\left(-\frac{1}{3}x^2\right)^2+3x=0,\quad x^4+27x=0$$

или $x\left(x^3+27\right)=0$, откуда $x_1=0,\quad x_2=-3$

Комплексные корни уравнения $x^3+27=0$ или $(x+3)\left(x^2-3x+9\right)=0$ не принимаем во внимание. Имеем две стационарные точки (0,0); (-3,-3). Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=9,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$$

В точке (0,0) $\Delta_1=0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}0&9\\9&0\end{vmatrix}=-81<0$ - нет экстремума

В точке (-3,-3)

$\Delta_1=-18, \Delta_2=\begin{vmatrix}-18&9\\9&-18\end{vmatrix}=81\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}=81(4-1)>0$ - функция имеет максимум $z(-3,-3)=27$

Наибольшее и наименьшее значения функции

Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области достигает в ней наибольшего и наименьшего значений или в стационарных точках или в точках на границе области.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции нужно:

1. Найти стационарные точки внутри области и вычислить в них значения функции.

2. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области.

3. Из всех полученных значений функции выбрать самое большее (меньшее) значение, которое и будет решением задачи.

Примеры.

а) Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z=2x^2-2y^2 \quad \text{в круге} \quad x^2+y^2\le 9$$

Для нахождения стационарных точек вычисляем частные производные

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-4y\end{cases},\quad \begin{cases}4x=0\\ -4y=0\end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение (0,0), в которое значение функции $z_0=f(0,0)=2\times 0-2\times 0=0$.

Границей области является окружность

$$x^2+y^2=9 \ \text{ или } \ y^2=9-x^2,$$

где $-3\le x\le 3$. Функция $z=2x^2-2y^2$ на границе области становится функцией одной переменной x:

$$z(x)=2x^2-2\left(9-x^2\right)=4x^2-18,\quad -3\le x\le 3$$

Найдём наибольшее и наименьшее значение функции z(x) на отрезке [-3, -3]

$z'(x)=8x$. Из уравнения $z'(x)=0$ находим единственную стационарную точку x = 0. В этой точке $z_1=z(0)=-18$. Вычислим значения функции z(x) на концах отрезка [-3,3]

$$z_2 = z(-3) = 4\times(-3)^2 - 18 = 18 \quad z_3 = z(3) = 4\times 3^2 - 18 = 18$$

Сравнивая между собой числа z_0, z_1, z_2, z_3 заключаем, что функция $z = f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ имеет наибольшее значение, равное 18 и наименьшее значение, равное −18, причем:

$$z_{наиб.} = f(-3,0) = f(3,0) = 18$$
$$z_{наим} = f(0,-3) = f(0,3) = -18$$

б) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y) = x^3 + y^3 + 6xy$ в прямоугольнике с вершинами A(-3,-3), B(-3,2), C(1,2), D(1,-3)

Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 6x$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ 3y^2 + 6x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ y^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

Находим две стационарные точки $M_1(0,0)$ и $M_2(-2,-2)$, обе лежащие внутри прямоугольника. Значения функции в этих точках будут: $z_1 = f(0,0) = 0$, $z_2 = f(-2,-2) = 8$

Перейдём к рассмотрению границы прямоугольника см. рис. 6. Граница прямоугольника состоит из четырёх отрезков AB, BC, CD, DA, на каждом из которых могут оказаться свои стационарные точки. Рассмотрим отрезок AB, уравнение которого x =-3, причём $-3 \le y \le 2$. На этом отрезке функция z будет функцией одной переменной y

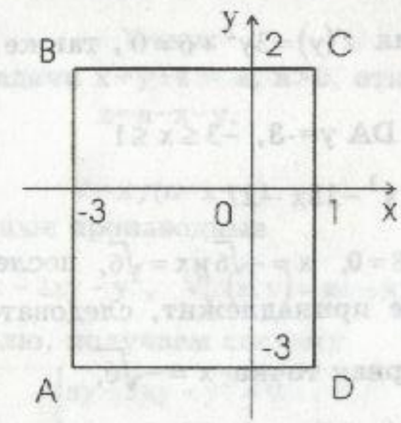

Рис.6

$$z = f(-3,y) = -27 + y^3 - 18y, \quad z(y) = y^3 - 18y - 27$$

Для исследования этой функции на экстремум находим её производную и приравниваем её нулю

$$z'(y) = 3y^2 - 18 = 0$$
$$y^2 = 6,\ y = -\sqrt{6} \approx -2.45 \text{ и } y = \sqrt{6} \approx 2.45$$

Второе значение не принадлежит отрезку [-3, 2] и его рассматривать не будем. Найдём значение функции f(y) при $y = -\sqrt{6}$:

$$z_3 = z(-\sqrt{6}) = (-\sqrt{6})^3 - 18(-\sqrt{6}) - 27 = 12\sqrt{6} - 27 \approx 2.4$$

На отрезке BC y = 2, $-3 \le x \le 1$ и $z = f(x,2) = x^3 + 8 + 12x$.

Производная этой функции $z'(x) = 3x^2 + 12 \ne 0$, у функции $z(x) = x^3 + 12x + 8$ нет стационарных точек.

На отрезке CD x = 1, $-3 \le y \le 2$

$$z = f(1,y) = y^3 + 6y + 1.$$

Производная $z'(y)=3y^2+6\neq 0$, также нет стационарных точек.

На отрезке DA $y=-3$, $-3\leq x\leq 1$

$z=f(x,-3)=x^3-18x-27$

$z'(x)=3x^2-18=0$, $x=-\sqrt{6}$ и $x=\sqrt{6}$, последняя точка отрезку [-3,1] не принадлежит, следовательно, имеется одна стационарная точка $x=-\sqrt{6}$,

$$z_4=z\left(-\sqrt{6}\right)=\left(-\sqrt{6}\right)^3-18\left(-\sqrt{6}\right)-27=12\sqrt{6}-27\approx 2.4$$

Осталось найти значения функции $z=f(x,y)=x^3+y^3+6xy$ в вершинах A, B, C, D.

$$z_5=f(A)=f(-3,-3)=(-3)^3+(-3)^3+6(-3)(-3)=0$$

$$z_6=f(B)=f(-3,2)=(-3)^3+2^3+6(-3)\times 2=-55$$

$$z_7=f(C)=f(1,2)=1^3+2^3+6\times 1\times 2=21$$

$$z_8=f(D)=f(1,-3)=1^3+(-3)^3+6(-3)1=-44$$

Сравнивая $z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6,z_7,z_8$, заключаем, что функция $z=x^3+y^3+6xy$ в прямоугольнике ABCD достигает наименьшего значения, равного −55, в точке B, и наибольшего значения, равного 21, - в точке C.

в) Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих сумму трёх измерений, равную положительной постоянной a, найти тот, объём которого – наибольший.

Обозначим длины рёбер параллелепипеда через x, y, z, x>0, y>0, z>0. Объём параллелепипеда V равен

$$V=xyz$$

По условию задачи x+y+z = a, a>0, откуда

$$z=a-x-y,$$

Поэтому

$$V=xy(a-x-y)$$

Находим частные производные

$$V'_x(x,y)=ay-2xy-y^2,\quad V'_y(x,y)=ax-x^2-2xy,$$

приравняв их нулю, получаем систему

$$\begin{cases} ay-2xy-y^2=0\\ ax-x^2-2xy=0\end{cases}$$

Так как $x\neq 0, y\neq 0$ то разделив первое уравнение на y, второе на x, получаем:

$$\begin{cases} 2x+y=a\\ x+2y=a\end{cases}$$

Решение этой системы даёт стационарную точку

$x_0=\frac{a}{3}, y=\frac{a}{3}$.

Вычислим в этой точке вторые частные производные:

$V''_{xx}(x,y)=-2y$, $V''_{xy}(x,y)=a-2x-2y$, $V''_{yy}(x,y)=-2x$

$V''_{xx}(x_0,y_0)=-\frac{2}{3}a$, $V''_{xy}(x_0,y_0)=a-\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}a=-\frac{1}{3}a$, $V''_{yy}(x_0,y_0)=-\frac{2}{3}a$

$$\Delta_1=-\frac{2}{3}a<0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-\frac{2}{3}a & -\frac{1}{3}a\\ -\frac{1}{3}a & -\frac{2}{3}a\end{vmatrix}=\frac{a^2}{9}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{a^2}{9}(4-1)=\frac{a^2}{3}>0$$

Точка $M\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$ является точкой максимума. Из уравнения $z=a-x-y$ находим $z_0=\frac{a}{3}$. Таким образом

$x_0=y_0=z_0=\frac{a}{3}$, искомый параллелепипед является кубом с ребром равным $\frac{a}{3}$ и объёмом $V=\frac{a^3}{27}$.

Условный экстремум

Если требуется найти экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии, что переменные x и y связаны соотношением

$$\varphi(x,y)=0 \qquad (19)$$

такой экстремум называется **условным** в отличие от безусловного экстремума, который ранее рассматривался. Соотношение (19) называется **уравнением связи.**

Для нахождения условного экстремума из функции $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ составляют **функцию Лагранжа:**

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \qquad (20)$$

параметр λ называется множителем Лагранжа. **Необходимое условие** условного экстремума даётся системой уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases} \qquad (21)$$

Решая систему (21), находим стационарные точки, координаты которых удовлетворяют уравнению связи (19).

Достаточное условие условного экстремума определяется с помощью второго дифференциала функции Лагранжа:

$$d^2L(x_0,y_0)=L''_{xx}(x_0,y_0)dx^2+2L''_{xy}(x_0,y_0)dxdy+L''_{yy}(x_0,y_0)dy^2 \qquad (22)$$

Если при выполнении условий

$$d\varphi(x_0,y_0)=\frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y}dy=0 \text{ и } dx^2+dy^2>0 \qquad (22)$$

$d^2L(x_0,y_0)$ является положительно определённой квадратичной формой, то функция $f(x, y)$ в стационарной точке $M(x_0y_0)$ имеет условный минимум; если $d^2L(x_0,y_0)$ отрицательно определена – условный максимум.

Пример.

Найти условные экстремумы функции $z=f(x,y)=6-5x-4y$ с уравнением связи $\varphi(x,y)=x^2-y^2-9=0$. Составим функцию Лагранжа и систему (21):

$$L(x,y)=6-5x-4y+\lambda(x^2-y^2-9)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=-5+2\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-4-2\lambda y=0\\ x^2-y^2-9=0\end{cases} \qquad (23)$$

Решениями системы (23) будут $x=-5$, $y=4$ при $\lambda=-\frac{1}{2}$ и $x=5$, $y=-4$ при $\lambda=\frac{1}{2}$. Таким образом, функция $f(x, y)$ может иметь условный экстремум только в двух точках: (-5, 4) и(5,-4). Вычислим второй дифференциал функции Лагранжа:

Так как $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda,$

то $d^2L = 2\lambda\left(dx^2 - dy^2\right)$.

Найдём первый дифференциал функции φ:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 2xdx - 2ydy = 0$$

В точках (-5,4) и (5, -4) дифференциалы dx и dy связаны равенством 5dx + 4dy = 0 (условие (22)). Отсюда находим:

$dy = -\frac{5}{4}dx$ и $d^2L = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\left(dx^2 - \frac{25}{16}dx^2\right) = \frac{9}{16}dx^2 > 0$ в точке (-5,4);

$d^2L = 2 \times \frac{1}{2}\left(dx^2 - \frac{25}{16}dx^2\right) = -\frac{9}{16}dx^2 < 0$ в точке (5; -4).

Следовательно, функция f(x, y) в точке (-5, 4) имеет условный минимум z(-5, 4) = 15, а в точке (5, -4) – условный максимум z(5, -4) = -3.

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука, 1961. - Т.1.

2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. - М.: Наука, 1965. - Т.2.

3. Зельдович Я. Б. Элементы прикладной математики. - М.: Наука, 1967.

4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. - М.: Наука, 1961.

5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Наука, 1967. - Т.1.

Содержание