

Старооскольский технологический институт (филиал)
Федерального государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования «Национальный исследовательский технологический университет
«МИСиС»

кафедра высшей математики

Чопчиян С.А., Савина Ю.В., Головченко Т.В.

МАТЕМАТИКА. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Методические указания по выполнению домашних заданий

Одобрено редакционно-издательским советом СТИ НИТУ МИСиС
в качестве методических указаний для студентов направлений подготовки бакалавров 230700, 230400,
140400, 220700 всех форм обучения

СТАРЫЙ ОСКОЛ 2011

УДК 51

ББК 22.1я73

Чопчиян С.А., Савина Ю.В., Головченко Т.В. Математика. Элементы аналитической геометрии: Учебное пособие. – Ст. Оскол: СТИ НИТУ МИСиС, 2011. – 35 с.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, профессор Архипов В.П.

Учебное пособие предназначено для студентов технических направлений очной формы обучения по программе подготовки бакалавров. Содержит теоретические сведения по теме курса математики «Аналитическая геометрия», методические указания, а также варианты домашнего задания.

Данное учебное пособие может быть использовано студентами при подготовке к практическим занятиям и к экзамену.

1. СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Системой координат на плоскости называют способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости. Одной из таких систем является *прямоугольная (декартова) система координат*.

Прямоугольная система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми – осями. На каждой оси выбрано положительное направление и задан масштаб (единичный отрезок). Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Оси называют *осями координат*, а точку пересечения осей (точку O) называют началом координат. Одну из осей называют *осью абсцисс* (ось Ox), другую – *осью ординат* (ось Oy).

Систему координат обозначают Oxy , а плоскость, в которой она расположена, называют *координатной плоскостью*.

Произвольной точке M на координатной плоскости Oxy соответствует пара чисел x и y , которые полностью определяют положение точки, т.е. каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка плоскости и наоборот. Числа x и y называются её *координатами*.

Координаты точки M записывают так: $M(x; y)$, число x называется *абсциссой* точки M , а y – её *ординатой*.

Другой практически важной системой координат является *полярная система координат*. Полярная система координат задается точкой O , называемой *полюсом*, лучом Op , называемой *полярной осью*, и единичным вектором совпадающим по направлению с лучом Op .

Возьмем на плоскости точку M . Положение точки M на плоскости определяется двумя числами: её расстоянием r от полюса O и углом φ , образованным отрезком OM с положительным направлением полярной оси.

Числа r и φ называются *полярными координатами* точки M , и записывают $M(r; \varphi)$.

2. ВЕКТОРЫ

Основные понятия и определения

Вектор – это направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.

Обозначается вектор одной буквой $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$. Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается символом или парой $\overline{AB}$. Векторы характеризуются *длиной* (модулем) $|\vec{a}|$, $|\overline{AB}|$ и направлением. Мы рассматриваем свободные векторы, т.е. такие, которые без изменения длины и направления могут быть перенесены в любую точку пространства.

Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^0$, который имеет единичную длину и то же направление, что и вектор $\vec{a}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых: записывают $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ($\vec{b} \uparrow \vec{a}, \vec{b} \downarrow \vec{a}$).

Три вектора, лежащие в одной плоскости или параллельные одной плоскости, называются *компланарными*.

Два вектора считаются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

Пусть даны два вектора. Параллельным переносом приведем их к общему началу. Наименьший угол, на который надо повернуть один вектор до совпадения с другим, называется *углом между векторами*.



Трехмерное пространство

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, являются *линейно-независимыми*, если они не лежат в одной плоскости.

Базисом в трехмерном пространстве R^3 называется упорядоченная тройка любых линейно-независимых векторов.

Базис называется *прямоугольным* (ортогональным), если векторы попарно перпендикулярны. Если они к тому же имеют длину, равную единице, то базис называется *ортонормированным*.

В пространстве R^3 обычно используют прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, где любая точка M пространства, имеющая координаты x (абсциссу), y (ординату) и z (аппликату), обозначается $M(x, y, z)$.

Свободный вектор, например $\vec{d}$, заданный в координатном пространстве $Oxyz$, может быть представлен в виде

$$\vec{d} = x_d \vec{i} + y_d \vec{j} + z_d \vec{k} \text{ или } \vec{d} = \{x_d, y_d, z_d\}.$$

Здесь x_d, y_d, z_d – проекции вектора $\vec{d}$ на соответствующие оси координат (координаты вектора), $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты этих осей.

Длина вектора определяется по формуле

$$|\vec{d}| = \sqrt{x_d^2 + y_d^2 + z_d^2}.$$

Направление вектора определяется углами α, β, γ , образованными им с осями координат Ox, Oy, Oz . Косинусы этих углов (так называемые направляющие косинусы вектора) вычисляются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{x_d}{|\vec{d}|}; \quad \cos \beta = \frac{y_d}{|\vec{d}|}; \quad \cos \gamma = \frac{z_d}{|\vec{d}|}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

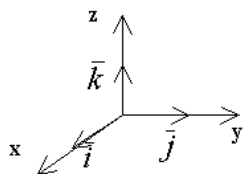


Рис. 2

Произведение вектора на скаляр

Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число m называется вектор $\vec{b} = \vec{a} \cdot m = m \cdot \vec{a}$, который удовлетворяет условиям:

1. $\{x_b, y_b, z_b\} = \{m \cdot x_a, m \cdot y_a, m \cdot z_a\}$.
2. $|\vec{b}| = |m| \cdot |\vec{a}|$.
3. $\vec{b} \parallel \vec{a}$.
4. $\vec{b} \uparrow \vec{a}$, если $m > 0$; $\vec{b} \downarrow \vec{a}$, если $m < 0$.

Следовательно, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, то

$$\frac{x_b}{x_a} = \frac{y_b}{y_a} = \frac{z_b}{z_a} = m.$$

Сложение и вычитание векторов

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, направленный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что начало $\vec{b}$ совпадет с концом вектора $\vec{a}$.

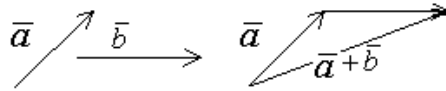


Рис. 3

Если векторы заданы их разложениями по базисным ортам, то при сложении векторов складываются их соответствующие координаты. Рассмотрим это на примере декартовой системы координат.

Пусть:

$$\bar{a} = x_a \bar{i} + y_a \bar{j} + z_a \bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{b} = x_b \bar{i} + y_b \bar{j} + z_b \bar{k}.$$

Тогда:

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_a + x_b) \bar{i} + (y_a + y_b) \bar{j} + (z_a + z_b) \bar{k}.$$

Свойства операции сложения векторов:

1. $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ (сочетательное);
2. $m \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = m \cdot \bar{a} + m \cdot \bar{b}$ (распределительное относительно суммы векторов);
3. $(m + n) \cdot \bar{a} = m \cdot \bar{a} + n \cdot \bar{a}$ (распределительное относительно суммы чисел).

В свойствах 2 и 3 множители m, n – действительные числа.

Под разностью векторов понимается вектор $\bar{c} = \bar{a} + (-\bar{b})$, где второе слагаемое является вектором, противоположным вектору $\bar{b}$ по направлению, но равным ему по длине.

Таким образом, операция вычитания векторов заменяется на операцию сложения:

$$\bar{a} - \bar{b} = (x_a - x_b) \bar{i} + (y_a - y_b) \bar{j} + (z_a - z_b) \bar{k}.$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a}, \bar{b}).$$

Из определения следует: $\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|}$,

где φ – угол между векторами.

Из определения скалярного произведения следует, что если векторы ортогональны, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ (условие ортогональности ненулевых векторов).

Свойства скалярного произведения:

1. $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$;
2. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ (переместительный закон);
3. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ (распределительный закон);
4. $(m \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (m \cdot \bar{b}) = m \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b})$ (сочетательный закон по скалярному множителю m).

Пусть два вектора заданы своими разложениями по ортам в декартовой системе координат

$$\bar{a} = x_a \bar{i} + y_a \bar{j} + z_a \bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{b} = x_b \bar{i} + y_b \bar{j} + z_b \bar{k}.$$

Скалярное произведение векторов, заданных проекциями в декартовой системе координат, равно сумме произведений одноименных координат, т. е.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.$$

Косинус угла между векторами определится выражением:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

Векторное произведение векторов

Три некопланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часов стрелки.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который:

1) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sin \varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ после приведения к общему началу образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a} \times \vec{b}]$

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (векторное произведение не обладает переместительным свойством);

2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, если либо $\vec{a} = \vec{0}$, либо $\vec{b} = \vec{0}$, либо $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (условие коллинеарности ненулевых векторов);

3. $(m \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m \cdot \vec{b}) = m \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ (сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю m);

4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (распределительное свойство).

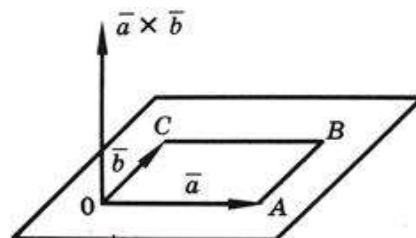
Пусть два вектора заданы своими разложениями по ортам в декартовой системе координат

$$\vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = x_b \vec{i} + y_b \vec{j} + z_b \vec{k}.$$

Тогда,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Т. е., вектор, получаемый в результате векторного произведения векторов, заданных своими координатами, получается из определителя, первой строкой которого являются координатные орты, вторая и третья строки состоят, соответственно, из координат первого и второго множителей.



Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c}.$$

Знак смешанного произведения совпадает со знаком $\cos \varphi$, и поэтому смешанное произведение положительно, когда тройка векторов правая, и отрицательно, если тройка векторов левая.

Если перемножаемые векторы лежат в одной плоскости, то $\left([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c} \right) = 0$ – необходимое и достаточное условие компланарности векторов.

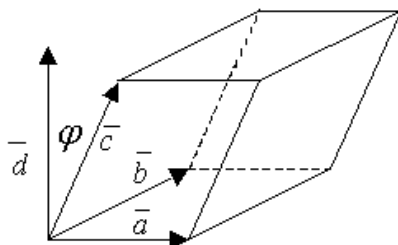
Пусть векторы заданы своими разложениями по ортам в декартовой системе координат

$$\bar{a} = x_a \bar{i} + y_a \bar{j} + z_a \bar{k}; \quad \bar{b} = x_b \bar{i} + y_b \bar{j} + z_b \bar{k}; \quad \bar{c} = x_c \bar{i} + y_c \bar{j} + z_c \bar{k}.$$

Тогда,

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения: модуль смешанного произведения трех векторов численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.



3. ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

Пусть на координатной плоскости OXY заданы две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

Расстояние между точками A и B вычисляется по формуле:

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Координаты $(x; y)$ точки M , делящей отрезок AB пополам (M – середина отрезка AB) находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (2)$$

Пусть требуется разделить отрезок AB соединяющий точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в заданном отношении $\lambda > 0$, т.е. найти координаты точки $M(x; y)$ отрезка AB такой, что $\frac{AM}{MB} = \lambda$. Тогда координаты $(x; y)$ точки M определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (3)$$

Формулы (3) называются *формулами деления отрезка в данном отношении*. Заметим, при $\lambda = 1$, формулы (3) примут вид (2). Если $\lambda = 0$, то это означает, что точки A и M совпадают, если $\lambda < 0$, то точка M лежит вне отрезка AB .

Каждая прямая на плоскости OXY определяется линейным уравнением первой степени с двумя неизвестными; т.е. уравнением вида:

$$Ax + By + C = 0, \quad (4)$$

где A, B , и C – постоянные коэффициенты.

Уравнение (4) называется *общим уравнением прямой*. Зная общее уравнение прямой, можно найти координаты ее направляющего ($\bar{a}$) и нормального ($\bar{n}$) векторов:

$$\bar{n} = (A; B), \quad \bar{a} = (-B; A).$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (5)$$

Угловым коэффициентом (κ) прямой называется отношение ординаты к абсциссе направляющего вектора прямой или тангенс угла, образованного прямой с осью OX , т.е.

$$\kappa = \frac{-A}{B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Если прямая проходит через точку $M_0 (x_0; y_0)$ в заданном направлении κ , то ее уравнение можно записать в виде:

$$y - y_0 = \kappa \cdot (x - x_0).$$

Под углом между прямыми на плоскости понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = \kappa_1 x + b_1$ и $y = \kappa_2 x + b_2$, то угол φ между ними вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \kappa_1 \cdot \kappa_2} \right|.$$

Условие параллельности прямых l_1 и l_2 имеет вид $\kappa_1 = \kappa_2$, а условие перпендикулярности $\kappa_1 = -\frac{1}{\kappa_2}$.

Если прямые пересекаются, то для нахождения общих точек прямых l_1 и l_2 необходимо решить систему уравнений $\begin{cases} y = \kappa_1 x + b_1 \\ y = \kappa_2 x + b_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$ (если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями).

Пример: Даны вершины треугольника ABC : $A (-2; 9); B (7; -3); C (13; 14)$. Требуется найти:

- 1) длину стороны AB ;
- 2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
- 3) уравнения медиан, проведенных из вершин A и B , и точку пересечения медиан;
- 4) уравнение высоты CT , проведенной из вершины C на сторону AB , и длину этой высоты.

Решение: 1) Расстояние d между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ определяется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (*)$$

Применяя формулу (*), находим длину стороны AB :

$$AB = \sqrt{(7 - (-2))^2 + (-3 - 9)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (**)$$

Чтобы составить уравнение стороны AB , подставляем в формулу (**) координаты точек A и B :

$$AB: \frac{y - 9}{-3 - 9} = \frac{x + 2}{7 + 2}; \quad \frac{y - 9}{-12} = \frac{x + 2}{9}; \quad \frac{y - 9}{-4} = \frac{x + 2}{3};$$

$$3y - 27 = -4x - 8; \quad 4x + 3y - 19 = 0.$$

Чтобы найти угловой коэффициент прямой AB , решим полученное уравнение относительно y :

$$3y = -4x + 19; \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}; \quad \text{следовательно, } \kappa_{AB} = -\frac{4}{3}.$$

Подставив в формулу (2) координаты точек A и C , получим уравнение прямой AC :

$$AC: \frac{y - 9}{14 - 9} = \frac{x + 2}{13 + 2}; \quad \frac{y - 9}{5} = \frac{x + 2}{15}; \quad \frac{y - 9}{1} = \frac{x + 2}{3};$$

$$x + 2 = 3y - 27; \quad x - 3y + 29 = 0,$$

или $y = \frac{1}{3}x + \frac{29}{3}$, отсюда угловой коэффициент $\kappa_{AC} = \frac{1}{3}$.

3) Пусть точка D есть середина отрезка BC , а точка E – середина отрезка AC . Для определения координат точек D и E применяем формулы деления отрезка на две равные части:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad x_D = \frac{7+13}{2}; \quad y_D = \frac{-3+14}{2}; \quad D\left(10; \frac{11}{2}\right);$$

$$x_E = \frac{-2+13}{2}; \quad y_E = \frac{9+14}{2}; \quad E\left(\frac{11}{2}; \frac{23}{2}\right).$$

Подставив в (2) координаты точек A и D , получим уравнение медианы AD .

$$AD: \frac{y-9}{11/2-9} = \frac{x+2}{10+2}; \quad \frac{y-9}{-7/2} = \frac{x+2}{12}; \quad \frac{y-9}{-7} = \frac{x+2}{24}; \\ -7x - 14 = 24y - 216; \quad 7x + 24y - 202 = 0.$$

Аналогично, подставив в формулу (2) координаты точек B и E , получим уравнение медианы BE :

$$BE: \quad 29x + 3y - 194 = 0.$$

Пусть N – точка пересечения медиан; чтобы найти координаты этой точки, надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x + 24y - 202 = 0, \\ 29x + 3y - 194 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим: $x = 6$; $y = \frac{20}{3}$.

Следовательно, $N\left(6; \frac{20}{3}\right)$ – точка пересечения медиан.

4) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид: $y - y_1 = \kappa(x - x_1)$.

Высота CT перпендикулярна стороне AB . Чтобы найти угловой коэффициент высоты CT , воспользуемся условием перпендикулярности прямых CT и AB .

$$\text{Так как, } \kappa_{AB} = -\frac{4}{3}, \text{ то } -\frac{4}{3}\kappa_{CT} = -1, \quad \kappa_{CT} = \frac{3}{4}.$$

Подставив координаты точки C и найденный угловой коэффициент прямой CT , получим уравнение прямой CT .

$$CT: \quad y - 14 = 3/4(x - 13); \quad 4y - 56 = 3x - 39; \quad 3x - 4y + 17 = 0.$$

Чтобы найти длину высоты CT , определим координаты точки пересечения прямых AB и CT , т.е. координаты точки T . Для этого решаем совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 19 = 0, \\ 3x - 4y + 17 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы дает: $x = 1$; $y = 5$, т.е. $T(1; 5)$.

Длину высоты CT находим по формуле:

$$d_{CT} = \sqrt{(13-1)^2 + (14-5)^2} = 15.$$

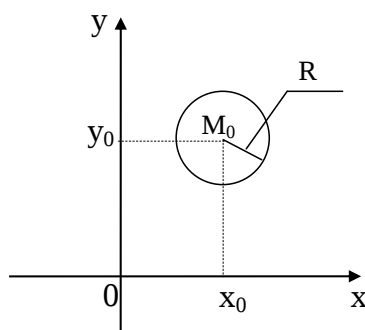
4. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Окружность

Окружностью радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $|M_0M| = R$.

В прямоугольной системе координат уравнение окружности имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где $(x_0; y_0)$ – координаты ее центра. В частности, если $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

(т.е. центр окружности совпадает с началом координат), то уравнение окружности примет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.



Эллипс

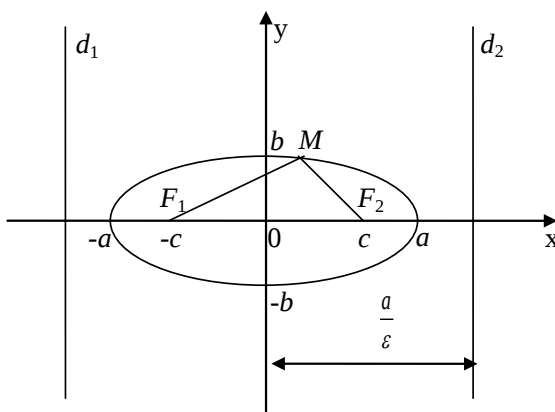
Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем

расстояние между фокусами, т.е. $|\overline{MF_1}| + |\overline{MF_2}| = 2a$.

Уравнение эллипса с центром в начале координат имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a – большая полуось, b – малая полуось эллипса.

Фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, где c – это половина фокусного расстояния, вычисляемая по формуле: $c^2 = a^2 - b^2$. *Эксцентриситетом эллипса* называется отношение фокусного расстояния к большой оси: $\varepsilon = \frac{c}{a}$, ($\varepsilon < 1$).

Директрисами эллипса называются прямые d_1 и d_2 параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$.



Уравнения директрис: $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$. Если центр эллипса смещен в точку $M_0(x_0; y_0)$, то уравнение эллипса примет вид: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. При нахождении параметров такого эллипса (фокусов, директрис) нужно учитывать этот сдвиг.

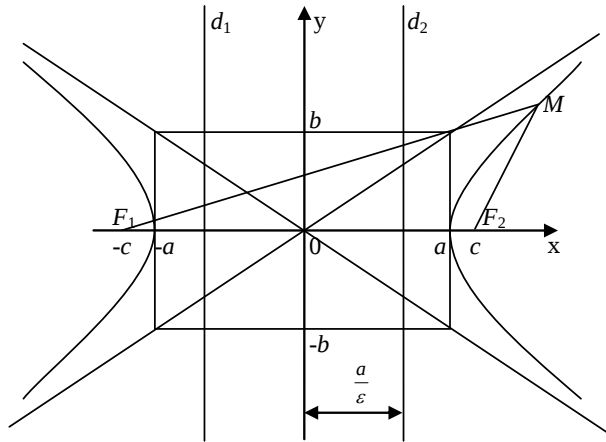
Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая

чем расстояние между фокусами, т.е. $||\overline{MF_1}| - |\overline{MF_2}|| = 2a$.

Уравнение гиперболы с центром в начале координат имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a – действительная, b – мнимая полуоси.

Фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, где c – половина расстояния между фокусами, вычисляемая по формуле $c^2 = a^2 + b^2$.



Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$, ($\varepsilon > 1$) называется *эксцентриситетом гиперболы*.

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется *основным прямоугольником гиперболы*. Диагонали этого прямоугольника лежат на двух прямых, называемых *асимптотами гиперболы*; они определяются уравнениями $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Прямые d_1 и d_2 , параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстоянии, равном a/ε , называются *директрисами гиперболы*. Их уравнения $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$.

Если центр гиперболы смещен в точку $M_0(x_0; y_0)$, то уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Пример: Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, если она проходит через точки $A(8; 2\sqrt{3})$ и $B(-6; -\sqrt{5})$. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот этой гиперболы; найти все точки пересечения гиперболы с окружностью, центр которой находится в начале координат, а радиус $R = 6$.

Решение: Каноническое уравнение искомой гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

По условию задачи точки A и B лежат на гиперболе. Следовательно, координаты этих точек удовлетворяют уравнению. Подставив в уравнение вместо текущих координат x и y координаты данных точек, получим систему двух уравнений относительно параметров a и b :

$$\begin{cases} \frac{64}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1, \\ \frac{36}{a^2} - \frac{5}{b^2} = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64b^2 - 12a^2 = a^2b^2, \\ 36b^2 - 5a^2 = a^2b^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$28b^2 - 7a^2 = 0, \text{ откуда следует } a^2 = 4b^2 (*).$$

Подставив (*) в первое уравнение системы, получаем: $64b^2 - 48b^2 = 4b^2b^2$; $b^2 = 4$; тогда $a^2 = 16$ и искомое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. Полуоси гиперболы: $a = 4$; $b = 2$.

Определим фокусы гиперболы $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

Так как для гиперболы имеет место равенство $c^2 = a^2 + b^2$, то $c^2 = 16 + 4 = 20$, $c = 2\sqrt{5}$. Следовательно, $F_1(-2\sqrt{5}; 0)$ и $F_2(2\sqrt{5}; 0)$ – фокусы гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$.

Следовательно, $y = \frac{x}{2}$ и $y = -\frac{x}{2}$ – искомые уравнения асимптот.

Уравнение окружности, центр которой находится в начале координат, имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$. Так как по условию радиус $R = 6$, то $x^2 + y^2 = 36$ есть уравнение данной окружности.

Чтобы найти координаты точек пересечения гиперболы с окружностью, решим совместно систему уравнений:

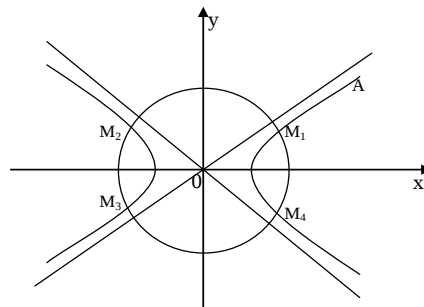
$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1, \\ x^2 + y^2 = 36. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = 36. \end{cases}$$

Отсюда имеем: $5y^2 = 20$, $y = \pm 2$; $x = \pm 4\sqrt{2}$.

Таким образом, получаем четыре точки пересечения:

$M_1(4\sqrt{2}; 2)$, $M_2(-4\sqrt{2}; 2)$, $M_3(-4\sqrt{2}; -2)$, $M_4(4\sqrt{2}; -2)$.

На рисунке построены данные точки, гипербола, окружность и точки их пересечения.



5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнение плоскости

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором $\vec{n} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости.

Уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$* .

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ называется *нормальным вектором* плоскости.

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ называется *общим уравнением плоскости*.

Три точки не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Пусть заданы три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$; $M_2(x_2; y_2; z_2)$; $M_3(x_3; y_3; z_3)$ не лежащие на одной прямой.

$$\text{Уравнение} \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Угол между двумя плоскостями

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2 : $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Под углом между плоскостями Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Угол φ между нормальными векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов. Поэтому $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$ или

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны, то таковы же их нормали, т.е. $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ (и наоборот). Но тогда $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, т.е. $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$. Последнее равенство есть условие перпендикулярности двух плоскостей Q_1 и Q_2 .

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны, то будут параллельны и их нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ (и наоборот). Тогда координаты векторов пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Это и есть условие параллельности двух плоскостей Q_1 и Q_2 .

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Уравнение прямой в пространстве

Положение прямой L в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямой и вектор $\vec{S}(m; n; p)$, параллельный этой прямой. Вектор $\vec{S}$ называется направляющим вектором прямой.

$$\text{Тогда равенства:} \quad \begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases}$$

называются параметрическими уравнениями прямой в пространстве.

Уравнения $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ (*) называются каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Пусть прямой L проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В качестве направляющего вектора $\vec{S}$ можно взять вектор $\vec{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, т.е. $\vec{S} = \vec{M_1 M_2}$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, то согласно уравнениям (*), уравнения прямой L имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Эти уравнения называются уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2 : $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

$$\text{Тогда уравнения} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

называют *общими уравнениями прямой*.

От общих уравнений прямой можно перейти к каноническим уравнениям. Координаты точки M_0 на прямой L получаем из системы, придав одной из координат произвольное значение (например, $z = 0$).

Так как прямая L перпендикулярна векторам $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, то за направляющий вектор $\vec{S}$ прямой L можно принять векторное произведение $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$:

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Угол между прямой и плоскостью

Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая L уравнениями $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и её проекцией на плоскость. Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L ,

а через θ – угол между векторами $\vec{n} = (A; B; C)$ и $\vec{S}(m; n; p)$. Тогда $\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{S}|}{|\vec{n}| |\vec{S}|}$. Найдем синус

угла φ , считая, что $\varphi < \frac{\pi}{2}$: $\sin \varphi = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta$. И так как $\sin \varphi \geq 0$, получаем

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Если прямая L параллельна плоскости Q , то векторы $\vec{n}$ и $\vec{S}$ перпендикулярны, а потому $\vec{S} \cdot \vec{n} = 0$, т.е. $Am + Bn + Cp = 0$ является условием параллельности прямой и плоскости.

Если прямая L перпендикулярна плоскости Q , то векторы $\vec{n}$ и $\vec{S}$ параллельны. Поэтому равенства $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ являются условием перпендикулярности прямой и плоскости.

Пересечение прямой с плоскостью

Пусть требуется найти точку пересечения прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ с плоскостью

$Ax + By + Cz + D = 0$. Для этого необходимо записать уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases} \text{ Подставим выражения для } x, y \text{ и } z \text{ в уравнение плоскости, и находим значение } t:$$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Подставляя найденное значение t в параметрическое уравнение прямой, найдем координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

Пример: Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3, 8, 5)$, $A_2(-3, 13, -5)$, $A_3(3, -2, 10)$, $A_4(2, 1, -4)$.

Требуется найти:

- 1) косинус угла α между плоскостями $(A_1A_2A_3)$ и $(A_2A_3A_4)$;
- 2) синус угла β между ребром A_1A_4 и плоскостью $(A_1A_2A_3)$;
- 3) площадь грани $(A_1A_2A_3)$;
- 4) объём пирамиды;
- 5) точку A_5 , симметричную A_4 относительно плоскости $(A_1A_2A_3)$;
- 6) высоту H , опущенную из A_4 на плоскость $(A_1A_2A_3)$.

Решение: 1) Для нахождения $\cos \alpha$ составим уравнение плоскостей $(A_1A_2A_3)$ и $(A_2A_3A_4)$.

$$P_{123} = \begin{vmatrix} x-3 & y-8 & z-5 \\ -3-3 & 13-8 & -5-5 \\ 3-3 & -2-8 & 10-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y-8 & z-5 \\ -6 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 5 \end{vmatrix} = -75x + 30y + 60z - 315 = 0 \text{ или } -5x + 2y + 4z - 21 = 0.$$

Тогда, $\vec{n}_1 = (-5; 2; 4)$.

$$P_{234} = \begin{vmatrix} x+3 & y-13 & z+5 \\ 3+3 & -2-13 & 10+5 \\ 2+3 & 1-13 & -4+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & y-13 & z+5 \\ 6 & -15 & 15 \\ 5 & -12 & 1 \end{vmatrix} = 165x + 69y + 3z - 387 = 0 \text{ или } 55x + 23y + z - 129 = 0.$$

Тогда, $\vec{n}_2 = (55; 23; 1)$.

$$\text{Получим } \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{-5 \cdot 55 + 2 \cdot 23 + 4 \cdot 1}{\sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{55^2 + 23^2 + 1^2}} = \frac{-225}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{3555}} \approx -0,563.$$

Ответ: 0,563.

2) $\sin \beta$ найдем по формуле $\sin \beta = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$. Воспользуемся уравнением плоскости $(A_1A_2A_3)$ $-5x + 2y + 4z - 21 = 0$ и вектором $\vec{A_1A_4} = (-1; -7; -9)$,

$$\sin \beta = \frac{|-45|}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{131}} \approx 0,586.$$

Ответ: 0,586.

3) Найдем площадь грани $(A_1A_2A_3)$ по формуле $S_{123} = \frac{1}{2} |\vec{A_1A_2} \times \vec{A_1A_3}|$. Найдем координаты векторов $\vec{A_1A_2}$ и $\vec{A_1A_3}$:

$$\vec{A_1A_2} = (-6; 5; -10); \vec{A_1A_3} = (0; -10; 5). \text{ Векторное произведение}$$

$$\vec{A_1A_2} \times \vec{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 5 \end{vmatrix} = -75\vec{i} + 30\vec{j} + 60\vec{k}. \text{ Получим}$$

$$S_{123} = \frac{1}{2} \sqrt{(-75)^2 + 30^2 + 60^2} = \frac{15\sqrt{45}}{2} \approx 50,31. \text{ Ответ: } 50,31.$$

4) Объём пирамиды $V = \frac{1}{6} |\vec{A_1A_2} \cdot \vec{A_1A_3} \cdot \vec{A_1A_4}|$. Координаты векторов найдены:

$$\vec{A_1A_2} = (-6; 5; -10); \vec{A_1A_3} = (0; -10; 5); \vec{A_1A_4} = (-1; -7; -9).$$

Смешанное произведение этих векторов

$$\vec{A_1A_2} \cdot \vec{A_1A_3} \cdot \vec{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -6 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 5 \\ -1 & -7 & -9 \end{vmatrix} = -540 - 25 + 100 - 210 = -675.$$

$$V = \frac{1}{6} |\vec{A_1A_2} \cdot \vec{A_1A_3} \cdot \vec{A_1A_4}| = \frac{|-675|}{6} = 112,5. \text{ Ответ: } 112,5.$$

5) Для нахождения A_5 симметричной A_4 относительно плоскости $(A_1A_2A_3)$, используем уравнение $(A_1A_2A_3) -5x+2y+4z-21=0$, нормальный вектор этой плоскости $\vec{n}=(-5;2;4)$. Уравнение прямой (A_4A_5) проходящей через точку $A_4(2,1,-4)$, перпендикулярно плоскости

$$(A_1A_2A_3) \frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{4}. \text{ Составим параметрические уравнения этой прямой: } \begin{cases} x = 2 - 5 \cdot t \\ y = 1 + 2 \cdot t \\ z = -4 + 4 \cdot t \end{cases}$$

Найдем координаты точки O пересечения прямой с плоскостью $(A_1A_2A_3)$, подставив в уравнение плоскости: $-5(2-5t)+2(1+2t)+4(-4+4t)-21=0$, $t=1$, $O(-3;3;0)$. Точка O середина отрезка (A_4A_5) . Используя формулу для координат середины отрезка получим, $A_5(-8,5,4)$. Ответ: $A_5(-8,5,4)$.

6) Высоту H , опущенную из A_4 на плоскость $(A_1A_2A_3)$ вычислим по формуле: $H = \frac{3V}{S_{123}}$.

Получим $H = \frac{3 \cdot 112,5}{50,31} = 6,71$.

Ответ: 6,71.

6. ВАРИАНТЫ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Задание 1. Даны координаты вершин треугольника ABC . Требуется найти:

- 1) длину стороны AB ;
- 2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
- 3) уравнения медиан, проведенные из вершин A и B , и точку пересечения медиан;
- 4) уравнение высоты CT , проведенной из вершины C , и длину этой высоты.

1. $A(-4; 6)$, $B(8; -10)$, $C(11; 11)$.
2. $A(-6; 8)$, $B(6; -8)$, $C(9; 13)$.
3. $A(-8; 10)$, $B(4; -6)$, $C(7; 15)$.
4. $A(-10; 4)$, $B(2; -12)$, $C(5; 9)$.
5. $A(-2; 7)$, $B(10; -9)$, $C(13; 12)$.
6. $A(-5; 9)$, $B(7; -7)$, $C(10; 14)$.
7. $A(-3; 11)$, $B(9; -5)$, $C(12; 16)$.
8. $A(-7; 13)$, $B(5; -3)$, $C(8; 18)$.
9. $A(-11; 12)$, $B(1; -4)$, $C(4; 17)$.
10. $A(-9; 5)$, $B(3; -11)$, $C(6; 10)$.
11. $A(-8; 7)$, $B(6; -2)$, $C(3; 12)$.
12. $A(-5; 6)$, $B(1; -7)$, $C(8; 10)$.
13. $A(-1; 9)$, $B(4; -3)$, $C(9; 15)$.
14. $A(-7; 2)$, $B(7; -6)$, $C(6; 12)$.
15. $A(-9; 3)$, $B(3; -11)$, $C(4; 10)$.
16. $A(-3; 5)$, $B(7; -9)$, $C(11; 10)$.
17. $A(-4; 8)$, $B(6; -7)$, $C(9; 13)$.
18. $A(-6; 12)$, $B(4; -4)$, $C(6; 16)$.
19. $A(-10; 8)$, $B(2; -5)$, $C(4; 13)$.

20. A (-5; 7), B (6; -8), C (11; 14).
21. A (-4; 8), B (2; -6), C (6; 12).
22. A (-2; 8), B (6; -5), C (7; 15).
23. A (-1; 3), B (5; -5), C (8; 13).
24. A (-6; 6), B (7; -3), C (6; 14).
25. A (-2; 9), B (3; -8), C (7; 10).
26. A (-4; 5), B (2; -7), C (8; 11).
27. A (-6; 7), B (3; -9), C (7; 12).
28. A (-2; 4), B (6; -3), C (8; 6).
29. A (-3; 9), B (2; -8), C (11; 14).
30. A (-9; 3), B (4; -6), C (8; 11).
31. A (-5; 2), B (3; -7), C (7; 10).
32. A (-9; 3), B (6; -5), C (4; 12).
33. A (-3; 5), B (4; -8), C (5; 9).
34. A (-6; 2), B (4; -5), C (6; 13).
35. A (-2; 4), B (3; -7), C (7; 11).
36. A (-7; 3), B (2; -2), C (4; 15).
37. A (-10; 2), B (3; -8), C (5; 7).
38. A (-8; 3), B (2; -6), C (4; 10).
39. A (-6; 2), B (5; -7), C (6; 9).
40. A (-5; 1), B (7; -8), C (5; 14).
41. A (-5; 6), B (1; -7), C (8; 10).
42. A (-1; 9), B (4; -3), C (9; 15).
43. A (-7; 2), B (7; -6), C (6; 12).
44. A (-9; 3), B (3; -11), C (4; 10).
45. A (-3; 5), B (7; -9), C (11; 10).

Задание 2. Даны координаты точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и радиус окружности R , центр которой находится в начале координат. Требуется:

- 1) составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через данные точки A и B ;
- 2) найти полуоси, фокусы и эксцентриситет этого эллипса;
- 3) найти все точки пересечения эллипса с данной окружностью;
- 4) построить эллипс и окружность.

1. A (8; -4), B (-2 $\sqrt{6}$; 6), R = 8.
2. A (-4; -6), B (2; 3 $\sqrt{5}$), R = 2 $\sqrt{13}$.
3. A (-8; 2), B (3 $\sqrt{6}$; 3), R = 3 $\sqrt{6}$.
4. A (-6; -6), B (3; 3 $\sqrt{5}$), R = 6 $\sqrt{2}$.
5. A (2; -4 $\sqrt{3}$), B (-2 $\sqrt{3}$; 4), R = 2 $\sqrt{10}$.
6. A (2 $\sqrt{6}$; -6), B (-8; 4), R = 8.
7. A (-2; 3 $\sqrt{5}$), B (4; -6), R = 4 $\sqrt{2}$.
8. A (3 $\sqrt{6}$; 3), B (-8; 2), R = 3 $\sqrt{5}$.
9. A (-3; 3 $\sqrt{5}$), B (-6; 6), R = 6 $\sqrt{3}$.
10. A (2 $\sqrt{3}$; 4), B (-2; -4 $\sqrt{3}$), R = 6.

11. $A(-8; -4), B(2\sqrt{6}; -6), R = 2\sqrt{15}$.
12. $A(4; 6), B(-2; -3\sqrt{5}), R = 2\sqrt{14}$.
13. $A(8; -2), B(-3\sqrt{6}; -3), R = 3\sqrt{7}$.
14. $A(6; 6), B(-3; -3\sqrt{5}), R = 6\sqrt{3}$.
15. $A(-2; 4\sqrt{3}), B(2\sqrt{3}; -4), R = 6$.
16. $A(-2\sqrt{6}; 6), B(8; -4), R = 8$.
17. $A(2; -3\sqrt{5}), B(-4; 6), R = 4\sqrt{3}$.
18. $A(-3\sqrt{6}; -3), B(8; -2), R = 3\sqrt{6}$.
19. $A(3; -3\sqrt{5}), B(6; -6), R = 6\sqrt{3}$.
20. $A(-2\sqrt{3}; -4), B(2; 4\sqrt{3}), R = 2\sqrt{10}$.
21. $A(3\sqrt{6}; 3), B(-8; 2), R = 3\sqrt{5}$.
22. $A(-3; 3\sqrt{5}), B(-6; 6), R = 6\sqrt{3}$.
23. $A(-4; 3), B(8; -3\sqrt{5}), R = 5$.

В задачах 24 – 45 даны координаты точек $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и радиус окружности R , центр которой находится в начале координат. Требуется:

- 1) составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через данные точки A и B , если фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс;
- 2) найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот этой гиперболы;
- 3) найти точки пересечения гиперболы с данной окружностью;
- 4) построить гиперболу, ее асимптоты и окружность.

24. $A(4; -4), B(-3; \sqrt{2}), R = 6$.
25. $A(-6; -8), B(2\sqrt{6}; 4), R = 10$.
26. $A(6; 2\sqrt{6}), B(-3\sqrt{5}; -6), R = 9$.
27. $A(-4; 3), B(8; -3\sqrt{5}), R = 5$.
28. $A(-6; -3\sqrt{6}), B(3\sqrt{3}; 6), R = 6$.
29. $A(-4; 6), B(3\sqrt{2}; 3\sqrt{5}), R = 8$.
30. $A(-\sqrt{15}; 3\sqrt{2}), B(4; 2\sqrt{6}), R = 9$.
31. $A(-3\sqrt{5}; 6), B(\sqrt{15}; 3), R = 7$.
32. $A(-6; 2\sqrt{5}), B(-4; \sqrt{10}), R = 10$.
33. $A(8; -3\sqrt{5}), B(4; -3), R = 6$.
34. $A(6; 3\sqrt{6}), B(-3\sqrt{3}; -6), R = 8$.
35. $A(6; 8), B(-2\sqrt{6}; -4), R = 9$.
36. $A(-4; -6), B(3; -\sqrt{2}), R = 7$.
37. $A(4; -3), B(-8; 3\sqrt{5}), R = 10$.
38. $A(2\sqrt{6}; 4), B(-6; 8), R = 11$.
39. $A(5; -3\sqrt{2}), B(-4; 2\sqrt{6}), R = 8$.
40. $A(3\sqrt{5}; -6), B(4; -3), R = 9$.
41. $A(6; -2\sqrt{5}), B(4; 6), R = 12$.
42. $A(-8; 3\sqrt{5}), B(-4; 3), R = 7$.

43. $A(-6; -8)$, $B(-2\sqrt{6}; -4)$, $R = 9$.

44. $A(4; -3)$, $B(-8; 3\sqrt{5})$, $R = 10$.

45. $A(2\sqrt{6}; 4)$, $B(-6; 8)$, $R = 11$.

Задание 3. Даны координаты вершин пирамиды

$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), A_4(x_4, y_4, z_4)$. Требуется найти:

- 1) косинус угла α между плоскостями $(A_1A_2A_3)$ и $(A_2A_3A_4)$;
- 2) синус угла β между ребром A_1A_4 и плоскостью $(A_1A_2A_3)$;
- 3) площадь грани $(A_1A_2A_3)$;
- 4) объём пирамиды;
- 5) точку A_5 , симметричную A_4 относительно плоскости $(A_1A_2A_3)$;
- 6) высоту H , опущенную из A_4 на плоскость $(A_1A_2A_3)$.

1. $A_1(3; -4; -9)$; $A_2(11; -11; 5)$; $A_3(-4; 10; -16)$; $A_4(-3; 1; 1)$.

2. $A_1(10; 3; 3)$; $A_2(3; 4; 1)$; $A_3(9; 1; 4)$; $A_4(3; -1; -3)$.

3. $A_1(9; -1; -4)$; $A_2(12; -5; 4)$; $A_3(-3; 7; -8)$; $A_4(-4; -4; -2)$.

4. $A_1(-1; 7; 1)$; $A_2(-2; 11; -7)$; $A_3(-2; -1; 5)$; $A_4(1; 2; -4)$.

5. $A_1(5; -2; -8)$; $A_2(18; -7; 2)$; $A_3(-9; 8; -13)$; $A_4(-1; -2; 1)$.

6. $A_1(-3; -3; -8)$; $A_2(-4; -7; 0)$; $A_3(2; 5; -12)$; $A_4(-3; 4; -3)$.

7. $A_1(16; 3; 3)$; $A_2(8; 2; 5)$; $A_3(8; 5; 2)$; $A_4(-1; -4; -4)$.

8. $A_1(0; -3; 3)$; $A_2(-4; -4; 5)$; $A_3(5; -1; 2)$; $A_4(0; 0; 3)$.

9. $A_1(1; -1; -1)$; $A_2(-1; -2; 1)$; $A_3(-1; 1; -2)$; $A_4(-4; -2; -2)$.

10. $A_1(9; -1; 2)$; $A_2(8; -3; 6)$; $A_3(5; 3; 0)$; $A_4(2; -2; 2)$.

11. $A_1(-1; -6; -6)$; $A_2(-1; -12; 6)$; $A_3(2; 6; -12)$; $A_4(-4; 2; 1)$.

12. $A_1(2; 3; 8)$; $A_2(-13; 7; 0)$; $A_3(11; -5; 12)$; $A_4(0; 0; -3)$.

13. $A_1(3; -4; -2)$; $A_2(6; -8; 6)$; $A_3(0; 4; -6)$; $A_4(-1; -1; 3)$.

14. $A_1(9; 6; 7)$; $A_2(4; 11; -3)$; $A_3(4; -4; 12)$; $A_4(4; -4; -3)$.

15. $A_1(8; -3; -8)$; $A_2(10; -9; 4)$; $A_3(1; 9; -14)$; $A_4(-3; -1; -3)$.

16. $A_1(-5; -1; 5)$; $A_2(-17; 1; 1)$; $A_3(10; -5; 7)$; $A_4(0; 3; 0)$.

17. $A_1(-3; 0; -2)$; $A_2(-8; -1; 0)$; $A_3(4; 2; -3)$; $A_4(-2; 4; -2)$.

18. $A_1(-5; 2; -1)$; $A_2(2; 1; 1)$; $A_3(-7; 4; -2)$; $A_4(-1; 4; 4)$.

19. $A_1(-5; 5; 7)$; $A_2(-12; 10; -3)$; $A_3(3; -5; 12)$; $A_4(1; 3; 0)$.

20. $A_1(-7; 9; 5)$; $A_2(7; 16; -9)$; $A_3(-17; -5; 12)$; $A_4(4; 0; 4)$.

21. $A_1(4; 1; 2)$; $A_2(4; 0; 4)$; $A_3(1; 3; 1)$; $A_4(0; 0; 2)$.

22. $A_1(1; -7; -2)$; $A_2(-1; -12; 8)$; $A_3(12; 3; -7)$; $A_4(-3; 2; 0)$.

23. $A_1(6; 4; 3); A_2(16; 5; 1); A_3(-8; 2; 4); A_4(3; -3; 4).$
24. $A_1(-2; -2; -6); A_2(4; -5; 0); A_3(-2; 4; -9); A_4(1; 3; 1).$
25. $A_1(7; -8; -5); A_2(7; -16; 11); A_3(4; 8; -13); A_4(-4; -2; 2).$
26. $A_1(3; -2; -8); A_2(8; -7; 2); A_3(-4; 8; -13); A_4(-4; 0; -2).$
27. $A_1(3; -10; -7); A_2(-7; -16; 5); A_3(14; 2; -13); A_4(-2; 0; -4).$
28. $A_1(2; -9; -4); A_2(-14; -14; 6); A_3(19; 1; -9); A_4(-2; 2; -4).$
29. $A_1(0; 2; 4); A_2(-5; 6; -4); A_3(1; -6; 8); A_4(0; -3; -3).$
30. $A_1(-6; 5; 0); A_2(10; 9; -8); A_3(-20; -3; 4); A_4(0; -3; 2).$
31. $A_1(0; -2; -8); A_2(15; -6; 0); A_3(-15; 6; -12); A_4(-4; -3; 1).$
32. $A_1(4; 1; -6); A_2(13; -1; -2); A_3(-8; 5; -8); A_4(-1; -2; -2).$
33. $A_1(-6; -5; -6); A_2(1; -7; -2); A_3(-5; -1; -8); A_4(0; 0; 1).$
34. $A_1(4; -3; -3); A_2(-5; -6; 3); A_3(10; 3; -6); A_4(-2; 1; -4).$
35. $A_1(12; -1; 1); A_2(9; -4; 7); A_3(6; 5; -2); A_4(0; -3; 0).$
36. $A_1(14; 5; 6); A_2(3; 7; 2); A_3(12; 1; 8); A_4(3; -2; -4).$
37. $A_1(5; 6; 2); A_2(2; 8; -2); A_3(2; 2; 4); A_4(1; 1; -3).$
38. $A_1(3; 1; 4); A_2(9; 2; 2); A_3(-6; -1; 5); A_4(1; -4; 4).$
39. $A_1(1; -5; 0); A_2(-5; -9; 8); A_3(7; 3; -4); A_4(-3; 1; 2).$
40. $A_1(7; 7; 6); A_2(5; 10; 0); A_3(2; 1; 9); A_4(3; 0; 0).$
41. $A_1(7; -8; -5); A_2(7; -16; 11); A_3(4; 8; -13); A_4(-4; -2; 2).$
42. $A_1(3; -2; -8); A_2(8; -7; 2); A_3(-4; 8; -13); A_4(-4; 0; -2).$
43. $A_1(3; -10; -7); A_2(-7; -16; 5); A_3(14; 2; -13); A_4(-2; 0; -4).$
44. $A_1(2; -9; -4); A_2(-14; -14; 6); A_3(19; 1; -9); A_4(-2; 2; -4).$
45. $A_1(0; 2; 4); A_2(-5; 6; -4); A_3(1; -6; 8); A_4(0; -3; -3).$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис – пресс, 2003. – 288 с.: ил., 21 см. Тираж 10000 экз. ISBN 5-8112-0151-6
2. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов/ Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др.: Под общ. ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1993. – 480 с., 21 см. Тираж 22470 экз. ISBN 5-02-014433-9
3. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1998. – 304 с.: ил., 20 см. Тираж 10000 экз. ISBN 5-06-003575-1

СОДЕРЖАНИЕ

1. Система координат на плоскости. Основные понятия.....
2. Векторы.....
3. Приложения метода координат на плоскости. Уравнения
прямой.....
4. Кривые второго порядка.....
5. Аналитическая геометрия в пространстве.....
6. Варианты домашнего задания.....
7. Список литературы.....

Учебное издание

Степан Алексеевич Чопчиян
Юлия Валерьевна Савина
Татьяна Викторовна Головченко

Математика. Элементы аналитической геометрии

Учебное пособие

Технический редактор: Иванова Н. И.

Корректор: Иванова Н. И.

Подписано к печати _____ Бумага для множительной техники
Формат _____ Усл. печ. лист. _____ Тираж 100 экз. Заказ _____

Отпечатано с авторского оригинала в отделе оперативной печати
Старооскольского технологического института.
Старый Оскол, микрорайон Макаренко, 40.
